

Algebra, Zahlentheorie.

● Perron, Oskar: Algebra. I. Grundlagen. 2., verb. Aufl. (Göschens Lehrbücherei. Gr. 1. Bd. 8.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter & Co. 1932. VIII, 300 S. u. 4 Abb. RM. 11.52.

Luzin, N.: Sur la méthode de Mr. A. Krylov de composition de l'équation séculaire. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otdél. mat. i estest. Nauk, VII. s. Nr 7, 903—958 (1931) [Russisch].

The main difficulty in transforming the "secular" determinant $\Delta(\lambda^2)$ into developed algebraic equation for λ^2 is caused by the form of this determinant, containing λ^2 only in diagonal line. A. Krylov's method (Zbl. 2, 291) avoids this difficulty by giving $\Delta(\lambda^2)$ a new form, where λ^2 appear only in the first column, what makes its development relatively simple. The memoir under review aims to find purely algebraic foundation and interpretation of this new and practical method. Krylov considers an auxiliary system of equation

$$\begin{aligned} x &= a q_1 + b q_2 + \dots + f q_k, \\ x' &= a_1 q_1 + b_1 q_2 + \dots + f_1 q_k, \\ &\vdots \\ x^{(k)} &= a_k q_1 + b_k q_2 + \dots + f_k q_k \end{aligned}$$

where a, \dots, f are any given constants and the sequence a_p, \dots, f_p is to be calculated according to the following rule — e. g. $c_p = a_{13}^{(p)} a + a_{23}^{(p)} b + \dots + a_{k3}^{(p)} f$ ($a_{ij}^{(p)}$ is the corresponding element of p -times repeated a_{ij} -matrix, a_{ij} being the coefficients of the original differential equations of small oscillations). Eliminating q_1, \dots, q_k from the above equation we get final differential equation for x :

$$\begin{vmatrix} xa & \dots & f \\ x'a_1 & \dots & f_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{(k)}a_k & \dots & f_k \end{vmatrix} = 0$$

or in developed form: $(-1)^k M x^{(k)} + (-1)^{k-1} M_1 x^{(k-1)} + \dots + M_k x = 0$, where

$$M = \begin{vmatrix} a & \dots & f \\ a_1 & \dots & f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1} & \dots & f_{k-1} \end{vmatrix}.$$

It can be shown that this equation is equivalent to the developed classical secular equation for λ : $(-1)^k \lambda^k + (-1)^{k-1} S_1 \lambda^{k-1} + \dots + S_k = 0$, whence

$$M \times \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & \dots & f \\ \lambda & a_1 & b_1 & \dots & f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^k & a_k & b_k & \dots & f_k \end{vmatrix}.$$

Thus M — a homogeneous function of the parameters a, \dots, f and of the elements of a_{ij} -matrix (degree $k(k-1)/2$) — when multiplied by the left side of the classical secular equation "transfers" λ in the secular determinant from diagonal into the first column. It is proposed to call M "Krylov's transferring multiplier". The author shows that Krylov's differential equation for x has always meaning as soon as $M \neq 0$. The demonstration is given that when the classical secular equation has not equal roots, M does not vanish identically (i. e. for all a, \dots, f). On the other hand there is not any inherent necessity for M to vanish identically also in the case of equal roots. As a matter of fact this phenomenon is of a rather complicated character. The author demonstrates that the necessary and sufficient condition for $M \equiv 0$ is as follows: the Weierstrass' elementary divisors of the a_{ij} -matrix should be mutually simple. This condition is also given in a rational form. Another problem consists in finding the set of a, \dots, f values, which do not make $M = 0$ (when $M \equiv 0$ identically). The author explicitly

states that this problems is not solved completely in his memoir. He supposes that it is in some way connected with Ljapunov's theory of the stability of motion. *B. P. Gerasimovič.*

Cauer, W.: Über Funktionen mit positivem Realteil. *Math. Ann.* **106**, 369—394 (1932).

Vorgegeben ist eine quadratische symmetrische q -reihige Funktionenmatrix Q der Variablen λ . Kann diese Matrix Q als Hauptminor einer n -reihigen Matrix ($n \geq q$)

$$A^{-1} = (L\lambda + R + D\lambda^{-1})^{-1}$$

aufgefaßt werden, wobei L, R, D Matrizen von nicht negativen quadratischen Formen in n Variablen sind, so heißt Q darstellbar und A eine Darstellung von Q . Verf. stellt sich nun die für die Elektrotechnik (Schaltungen) wichtige Aufgabe, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzusuchen, daß Q darstellbar ist. — Verf. zeigt, daß jede darstellbare Matrix notwendigerweise folgende Bedingungen erfüllt: 1. Q ist in der rechten λ -Halbebene regulär. 2. Der reelle Teil von Q gehört dort zu einer positiv definiten quadratischen Form. 3. Q nimmt für reelle λ reelle Werte an. Es wird die Vermutung ausgesprochen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, und zwar wird diese Vermutung für einige Spezialfälle bewiesen ($q = 1, 2$, wobei die Elemente von Q noch gewisse Bedingungen erfüllen). — Außerdem behandelt Verf. noch einige für die Anwendung wichtige Interpolationsprobleme, bei denen es sich darum handelt, eine vorgegebene Matrix Q^* durch Matrizen Q zu approximieren, die den Bedingungen 1., 2., 3. genügen und deren Elemente rationale Funktionen von λ sind.

U. Wegner (Darmstadt).

Murnaghan, Francis D.: On the unitary invariants of a square matrix. (*Dep. of Math., Johns Hopkins Univ., Baltimore.*) *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **18**, 185—189 (1932).

Es wird für n -reihige quadratische Matrizen ein volles Invariantensystem für unitäre Äquivalenz angegeben. Für den Fall, daß die Eigenwerte von \mathfrak{A} alle verschieden sind, lautet das Resultat so: Es sei \mathfrak{X} eine Matrix, die n zu den verschiedenen Eigenwerten gehörige normierte Eigenvektoren als Spalten enthält. \mathfrak{Y} sei eine entsprechende Matrix für \mathfrak{B} . \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind dann und nur dann unitär äquivalent, d. h. $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{U}^*$ (\mathfrak{U} unitär, \mathfrak{U}^* die zu \mathfrak{U} konjugierte und transponierte Matrix), wenn die Eigenwerte übereinstimmen und $\mathfrak{X}^*\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}^*\mathfrak{Y}^*\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, \mathfrak{Z} eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen vom Betrag 1. Dabei sind in entsprechende Spalten von \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} natürlich die zu denselben Eigenwerten gehörigen Vektoren zu setzen. — Der allgemeine Fall wird an zwei Beispielen auseinandergesetzt.

Köthe (Münster i. W.).

Murnaghan, Francis D.: On the field of values of a square matrix. (*Dep. of Math., Johns Hopkins Univ., Baltimore.*) *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **18**, 246—248 (1932).

Von dem Wertebereich der quadratischen Form

$$(Ax|x) = \sum a_{pq} x_q \bar{x}_p,$$

wobei a_{pq} beliebige komplexe Zahlen sind, unter der Nebenbedingung $\sum x_p \bar{x}_q = 1$, weiß man, daß er konvex ist. Im Falle nicht normaler Matrizen konnte Wintner für $n = 2$ zeigen, daß der Bereich von einer Ellipse begrenzt wird, deren Brennpunkte die beiden charakteristischen Wurzeln der Matrix (a_{pq}) sind. Verf. zeigt, daß ein ähnlicher Satz auch im Falle $n > 2$ gilt. Die Begrenzungskurve wird dargestellt durch ein Polynom in den Längen der Lote, die man von den charakteristischen Wurzeln aus auf eine Stützgerade des Bereichs fallen kann. Als Parameter enthält die Gleichung rational die Größe $e^{i\theta}$, wobei $\frac{\pi}{2} + \theta$ der Winkel zwischen Stützgerade und positiver Abszissenrichtung ist. Verf. gelangt zu dem Resultat, indem er lediglich den Realteil der Form betrachtet, der eine hermitesche Form darstellt, deren Wertebereich das Intervall zwischen größtem und kleinstem Eigenwert ausmacht.

Wegner (Darmstadt).

Finzi, B.: Matrici-Tensori-Omografie. *Rend. Semin. mat. fis. Milano* **5**, 87—105 (1931).

Si mettono a raffronto le matrici, i tensori, le omografie per porne in evidenza le analogie, le differenze, le interdipendenze.

Autoreferat.

Franklin, Philip: Algebraic matrix equations. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 10, 289–314 (1931).

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Matrixgleichung $P(X) = A$, wo P ein Polynom mit skalaren Koeffizienten ist, eine Lösung $X = L(A)$ als Polynom in A besitzt. Die Ergebnisse werden verallgemeinert auf transzendente Funktionen und auf Gleichungen der Form $P(A, X) = 0$. Über die Lösung der allgemeinsten Gleichung $\sum A_i X^i = 0$ werden einige Bemerkungen gemacht, während zum Schluß eine Anwendung auf die Bestimmung eines „Systems konjugierter Matrices“ zu einer gegebenen Matrix gemacht wird. *van der Waerden* (Leipzig).

Amato, Vincenzo: Sul gruppo totale delle sostituzioni sopra n elementi. Note Esercit. mat. 6, 30–42 (1931).

L'Autore denota con G_n il gruppo totale delle sostituzioni su n elementi, con G_S il sottogruppo di G_n formato dalle sostituzioni di G_n commutabili con una data sostituzione S di G_n , con J_S il centrale di G_S e con I_S l'insieme delle sostituzioni di G_n che sono commutabili soltanto con le sostituzioni di G_S . Seguendo la terminologia e le vedute di M. Cipolla nei suoi lavori sulla struttura dei gruppi d'ordine finito [Rend. R. Acc. sc. fis. mat. Napoli, III. s. 15, 44 e 113 (1909); 17, 26 (1911); 18, 29 (1912); 20, 118, 126 e 136 (1914)], l'Autore chiama G_S „sottogruppo fondamentale“, J_S „sottogruppo abeliano fondamentale“ e I_S „sistema fondamentale“ di G_n ; studia quindi la distribuzione delle sostituzioni di G_n nei sottogruppi fondamentali, nonché la costituzione dei corrispondenti centrali e dei relativi sistemi, determinando in particolare l'ordine di G_S , J_S e I_S nei vari casi secondo un'opportuna tabella. *M. Cipolla*.

Amato, Vincenzo: Sul rango del gruppo totale delle sostituzioni sopra n elementi. Note Esercit. Mat. 6, 75–81 (1931).

L'Autore (cfr. rel. prec.), considerando il gruppo totale G_n delle sostituzioni S su n elementi, chiama (secondo M. Cipolla) „di genere 1“ un sottogruppo fondamentale di G_n che non contenga alcun sottogruppo fondamentale di G_n (oltre sè stesso), „di genere 2“ un sottogruppo fondamentale di G_n che contenga almeno un sottogruppo fondamentale di genere 1, ma nessun altro sottogruppo fondamentale che non sia di genere 1, e così via; chiama poi „rango“ di G_n il maggiore dei generi dei sottogruppi fondamentali di G_n . Supposto che sia $S = A_1 A_2 \dots A_h$ ($h \geq 1$), con A_1, A_2, \dots, A_h sostituzioni regolari aventi per gradi i numeri $r_1 (\geq 1), r_2, \dots, r_h$ tutti diversi, denotando con $k(r_i)$ il numero totale dei fattori primi eguali e diseguali di r_i , l'Autore denomina „altezza di S “ il numero $k(r_1) + k(r_2) + \dots + k(r_h)$ ossia $k(r_1 r_2 \dots r_h)$, e dimostra che: Il rango di G_n è uguale alla massima altezza delle sue sostituzioni, quando questa non sia raggiunta da una che sposti $n - 2$ elementi soli, altrimenti esso è uguale a questa massima altezza aumentata di 1. L'Autore infine trasforma questo criterio in un altro più comodo per il calcolo effettivo del rango. Dicendo „regolare“ una partizione di n se è formata da numeri (interi positivi) tutti diversi; „irregolare“ se due addendi sono eguali a 2 e gli altri tutti diversi fra loro e da 2, „altezza di una partizione regolare: $n = r_1 + r_2 + \dots + r_h$ “ il numero $k(r_1 r_2 \dots r_h)$ ed „altezza di una partizione irregolare: $n = r_1 + r_2 + \dots + r_h + 2$ “ il numero $1 + k(r_1 r_2 \dots r_h)$ l'Autore conclude che: Il rango di G_n è uguale alla massima altezza delle partizioni regolari ed irregolari di n . *M. Cipolla* (Palermo).

Scholz, Arnold: Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander. J. reine angew. Math. 166, 201–203 (1932).

$P(\sqrt{-d})$ sei ein imaginärer quadratischer Zahlkörper, der $3^r - 1$ Idealklassen der Ordnung 3 enthält. Die Anzahl der Idealklassen von der Ordnung 3 im reellen Körper $P(\sqrt{3d})$ sei $3^s - 1$. Dann gilt $s \leq r \leq s + 1$. Der Beweis verläuft so: Es gibt r unabhängige (nicht Galoissche) kubische Körper K_v , deren Komposita mit $P(\sqrt{-d})$ unverzweigte zyklische Körper dritten Grades über $P(\sqrt{-d})$ sind. Der Körper $P(\sqrt[3]{-d}, \sqrt[3]{-3}, K_v)$ entsteht aus $P(\sqrt[3]{-d}, \sqrt[3]{-3})$ durch Adjunktion einer $\sqrt[3]{\alpha_v}$, wo

α_v in $P(\sqrt[3]{3A})$ liegt; und da $P(\sqrt[3]{-A}, \sqrt[3]{-3}, K_v)$ absoluter Klassenkörper über $P(\sqrt[3]{-A}, \sqrt[3]{-3})$ ist, so ist α_v singuläre Primärzahl, also Idealkubus in diesem Körper, also auch im Teilkörper $P(\sqrt[3]{3A})$ vom Index 2. Vergleicht man die Anzahl r der in Beziehung auf dritte Zahlpotenzen unabhängigen Idealkuben α_v in $P(\sqrt[3]{3A})$ mit der Anzahl der Idealklassen von der Ordnung 3, so findet man $r \leq s + 1$. Vertauschung der Rollen von $P(\sqrt[3]{-A})$ und $P(\sqrt[3]{3A})$ führt zu $s \leq r$. Um zwischen $s = r$ und $s + 1 = r$ zu entscheiden, müssen weitere Eigenschaften der singulären Primärzahlen α_v herangezogen werden. — Der Verf. vermutet, daß man im allgemeinen keine Beziehung zwischen den ungeraden Klassengruppen zweier Körper $P(\sqrt{\delta}), P(\sqrt{\delta\delta})$ bei festem δ wird feststellen können, die der oben formulierten Beziehung zwischen $P(\sqrt{-A})$ und $P(\sqrt{3A})$ an die Seite zu stellen wäre. *Deuring* (Leipzig).

Woude, W. van der: Über eine algebraische Aufgabe bei der Reduktion von algebraischen Integralen auftretend. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 34, 1264—1270 (1931).

J. C. Kluyver hat die Frage nach der Reduzierbarkeit gewisser Abelscher Integrale auf das folgende algebraische Problem zurückgeführt. Gegeben seien drei linear-unabhängige binäre quadratische Formen φ, ψ, χ , deren sechs Nullstellen alle verschieden sind. Gefragt wird, welche Beziehung zwischen ihren Koeffizienten bestehen muß, damit es möglich sei, jede von ihnen mit dem Quadrat einer Linearform zu multiplizieren, so daß die entstehenden biquadratischen Formen einer und derselben Involution angehören, welche auch das Quadrat einer ebenfalls gesuchten quadratischen Form τ enthalten soll. — Der Verf. löst die Frage auf geometrischem Wege mit Hilfe der bekannten Darstellung des binären Gebiets durch die Punkte eines Kegelschnitts. Hinterher wird die gefundene Bedingung mit der von Kluyver gefundenen Formel identifiziert. Schließlich wird angegeben, wie man die Form τ wirklich berechnen kann.

van der Waerden (Leipzig).

Weyl, Hermann: Über Algebren, die mit der Komplexgruppe in Zusammenhang stehen, und ihre Darstellungen. Math. Z. 35, 300—320 (1932).

Die Komplexgruppe Γ besteht aus den linearen Transformationen eines $(2n)$ -dimensionalen Vektorraumes \mathfrak{R} , welche das „schiefe Produkt“

$$[xy] = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \dots + (x_{2n-1} y_{2n} - x_{2n} y_{2n-1}) = \sum \varepsilon(ik) x_i y_k$$

zweier Vektoren in \mathfrak{R} invariant lassen. Das Problem der Auffindung aller rationalen Darstellungen der Komplexgruppe läßt sich zurückführen auf das andere, im Raum \mathfrak{R}_f aller Tensoren f -ter Stufe die von Γ induzierte Darstellung Γ_f in ihre irreduzible Bestandteile zu zerlegen. Das gelingt nun nicht direkt, sondern es wird zunächst ein Ring Σ von linearen Transformationen des Tensorraums \mathfrak{R}_f gebildet, der die Gruppe Γ_f umfaßt und dadurch charakterisiert ist, daß bei den Transformationen von Σ die folgenden Operationen invariant sind: a) alle Indexvertauschungen, b) die Spurbildung, die aus einem Tensor $f(i_1, i_2, \dots, i_f)$ den Tensor

$$\varphi(i_3 \dots i_f) = \sum_{i_1, i_2} \varepsilon(i_1 i_2) f(i_1 i_2 \dots i_f)$$

erzeugt. Das System Σ wird nun nach der Methode ausreduziert, die der Verf. in seinem Buch „Gruppentheorie und Quantenmechanik“, 2. Aufl., Leipzig 1931, für den Fall der vollen linearen Gruppe entwickelt hat. Das wichtigste neu Hinzukommende ist die eindeutige Zerlegung eines jeden Tensors in einen solchen, dessen Spuren alle Null sind und einen Tensor von der Form

$$\varepsilon(i_1 i_2) f_{12}(i_3 \dots i_f) + \dots$$

Die Tensoren mit Spuren Null bilden einen gegenüber Σ invarianten Teilraum \mathfrak{R}_f^* , auf dessen Zerlegung in irreduzible Bestandteile die Zerlegung von \mathfrak{R}_f zurückgeführt werden kann. Die Zerlegung von \mathfrak{R}_f^* läßt sich nun mit Hilfe der Youngschen Symmetrie-

operatoren (das sind primitive Idempotenten der Gruppenalgebra der symmetrischen Gruppe) explizit angeben: Der einzelne irreduzible Bestandteil enthält alle Tensoren

$$\varphi = e_v \psi, \quad \psi \text{ in } \mathfrak{H}_f^*.$$

Dabei benötigt man nur die e_v wirklich, deren Symmetrieschema nicht mehr als n Zeilen enthält. — Gelänge es nun, direkt einzusehen, daß Σ die kleinste, Γ_f umfassende Algebra ist, so wäre damit zugleich eine elementare Herleitung der rationalen Darstellungen von Γ gewonnen. Der Verf. verfährt umgekehrt, indem er aus den bekannten Tatsachen über die Darstellungen von Γ [vgl. H. Weyl, Math. Z. 23, 271; 24, 238, sowie Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1926, 235] durch Vergleich mit den hier gewonnenen Ergebnissen auf Grund des Burnsidischen Satzes feststellt, daß Σ der kleinste Ring über Γ_f ist, gleichzeitig aber auf das Unbefriedigende dieser Schlußweise hinweist.

van der Waerden (Leipzig).

Bush, L. E.: Note on the discriminant matrix of an algebra. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 49—51 (1932).

The writer establishes for every linear associative algebra \mathfrak{A} over an infinite field the existence of a basis which reduces to the ordinary normal basis when \mathfrak{A} is nilpotent, and to MacDuffee's normal basis when \mathfrak{A} has a principal unit. MacDuffee.

Shohat, J., and J. Sherman: On the numerators of the continued fraction $\frac{\lambda_1}{|x - c_1|} - \frac{\lambda_2}{|x - c_2|} \dots$ (Dep. of Math., Univ. of Pennsylvania, Philadelphia.) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 283—287 (1932).

Naheliegende Folgerungen aus bekannten Sätzen über Stieltjessche Kettenbrüche.

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Beeger, N. G. W. H.: On certain magic squares. Nieuw Arch. Wiskde 17, 151—162 (1932).

In this paper a square matrix whose elements are the integers $1, 2, 3, \dots, n^2$ is called a magic square provided the sum of the elements in each row, each column and in each of the two diagonals is $n(n^2 + 1)/2$. The paper deals with magic squares constructed by the so called "uniform step" method (in which n is odd), and their transforms. The methods of the paper are those of D. N. Lehmer (Trans. Amer. Math. Soc. 31, 529—551) in which a magic square is described by a pair of congruences (mod n) involving the greatest integer function. The author finds necessary and sufficient conditions on the constants involved in these congruences that the square be a magic square according to the above definition. The problem of enumerating the magic squares where n is a fixed odd prime is next discussed. The number of such squares is found to be $n(n-1)^2(n-2)^2(n-3) + 2(n-1)^2$. The squares which result from the transformations S and T of Lehmer are finally enumerated. These transformations produce $(n-2)!^2$ magic squares from each uniform step square. Thus for $n = 5$ we get 52992 magic squares.

D. H. Lehmer (Berkeley, U.S.A.).

Carmichael, R. D.: Some recent researches in the theory of numbers. Amer. Math. Monthly 39, 139—160 (1932).

Bericht über neuere Arbeiten der additiven Zahlentheorie und die Persönlichkeit und die Arbeiten Ramanujans.

Hans Heilbronn (Göttingen).

Bernstein, Vladimiro: Sopra Pultraconvergenza di certe serie di Dirichlet. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 475—479 (1931).

L'auteur appelle groupe de Bohr de $p + 1$ termes, correspondant à $\{\lambda_n\}$, l'expression de la forme

$$b_n^{(p)} = b_n \sum_{v=m_n}^{v=m_n+p} \frac{e^{-\lambda_n s}}{\psi'(\lambda_n)}. \quad \left(\psi(z) = \prod_{v=m_n}^{v=m_n+p} (z - \lambda_n) \right) \quad (1)$$

Il appelle groupe de Bohr généralisé (de $p + 1$ termes) l'expression

$$B^{(p)}(s) = b^{(p)}(s) + b^{(p-1)}(s) + \dots + b^{(1)}(s)$$

où $b^{(p)}(s)$ désigne le groupe de Bohr de $p + 1$ termes du type (1), $b^{(p-1)}(s), \dots, b^{(1)}(s)$ étant respectivement les groupes de Bohr de $p_1 \dots 2$ termes formés de sorte que tous les λ_n qui interviennent dans $b^{(i)}(s)$ interviennent aussi dans $b_{(s)}^{(i+1)}(s)$. — L'auteur généralise alors un exemple de M. Bohr [Rend. Circ. mat. Palermo 1, 37 (1913)] de la manière suivante: Supposons que $\{\lambda_n\}$ possède une densité maxima finie. C étant l'axe de convergence de $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ supposons que cette série est «ultraconvergente» (überkonvergente) dans la bande $A < R(s) \leq C$. On a alors

$$f(s) = H(s) + \varphi(s) \begin{cases} H(s) = \sum b_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(s) \\ \varphi(s) = \sum C_n e^{-\lambda_n s} \end{cases}$$

où $\varphi(s)$ converge dans $R(s) > A$, les $B_k(s)$ étant les groupes de Bohr généralisés (les λ_n faisant partie de B_k étant supérieurs à tous les λ_n intervenant dans B_{k-1}). On a en plus $\lim \{1/\mu_m \log |d_m|\} \leq A$, où désigne soit C_m (alors $\mu_m = \lambda_m$) soit b_m du groupe de Bohr (alors $\mu_m = \min.$ des λ_n intervenant dans ce groupe). La démonstration n'est pas donnée. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

● Cantor, Georg: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind. Hrsg. v. Ernst Zermelo. Nebst einem Lebenslauf Cantors v. Adolf Fraenkel.* Berlin: Julius Springer 1932. VII, 486 S. RM. 48.—.

Fraenkel, Adolf: *Axiomatische Theorie der Wohlordnung. (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. III.) (Math. Inst., Univ. Jerusalem.) J. f. Math. 167, 1—11 (1932).*

This article is a sequel of Zermelo's *Grundlagen der Mengenlehre* [Math. Ann. 65 (1908)], giving, substantially on the basis of Zermelo's axioms, the development of a general theory of normal order—such a development was alluded to by Zermelo but never published. The principle item of difference in the postulational basis of the author as compared to that of Zermelo is in the restricted form of the Axiom der Aussonderung: Sind $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ Funktionen von x , und ist \circ eine der Grundrelationen $=, \neq, \in, \notin$, so existiert zur gegebenen Menge M die Aussonderungsmenge $M_{\Phi \circ \Psi}$, d. h. die Teilmenge derjenigen Elemente x von M , für die $\Phi(x) \circ \Psi(x)$ gilt. Here function means an association—of a type specified in detail by the author—of set with set; \in means belongs, \notin does not belong. This postulational basis, even with this restricted axiom, suffices as the author shows, for proving the general theorems concerning order. Order and normal order are defined, after the manner of Dedekind, Zermelo and Hessenberg, by means of chains of sets. After deriving from the definition of normally ordered sets certain equivalent properties, the author proves the inductive principle for normally ordered sets and their comparability. The proofs are of the customary patterning in such abstract work. The logical refinement exercised is seen in that, for example, the existence of the null set is derived from the postulational basis rather than taken as a fact. The theorems for normal order beyond the point where the author leaves off can be proved along familiar lines.

Blumberg (Columbus).

Webber, W. J.: *The ordinal characterization of linear sets.* Trans. Roy. Soc. Canada III Math. Sci., III. s. 25, 65—74 (1931).

A study of simply ordered sets E , satisfying the Dedekind axiom of continuity, such that between any two elements there is another. The principal results obtained are: If all closed intervals of E are similar every element of E is co-initial and co-final with a series of type ω ; If for every perfect subset of E the complementary set of inter-

vals is at most countably infinite, then E is similar to the continuum R of real numbers. There exists a set E in which all closed intervals are similar which is not similar to R . This set E consists of elements

$$\alpha = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots, \quad (n < \omega)$$

where a_n is a real number from the interval $(0,1)$, and the order corresponds to that used in compiling a dictionary. A cyclic set E_1 is easily derived from an interval (α_0, α_1) of E and provides an example of a cyclic homogeneous, one dimensional, locally connected set which is not the topological image of a circle. The article concludes with a discussion of a canonical method corresponding to the decimal system of representing the sets E in which each element is both co-initial and co-final with a series of type ω .
Chittenden (Iowa).

Folley, K. W.: Sets of the first and second α -category and α -residual sets. Trans. Roy. Soc. Canada III Math. Sci., III. s. 25, 137—143 (1931).

The classical theory of sets of the first and second categories is extended to continuous simply ordered sets M , called Dedekindian sets, with the further property: there is a subset N of M , dense on M which is neither co-final or co-initial with any subset of cardinal number \aleph_α , and which contains no pair of neighboring subsets both of cardinal number less than \aleph_α .
Chittenden (Iowa).

Whyburn, W. M.: On the integration of unbounded functions. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 123—131 (1932).

The following results are obtained. A necessary and sufficient condition that a function $f(x)$ be measurable on an interval $X = (a, b)$ is that there exist a sequence of simple functions [F. Riesz, Acta math. 42, 191—205 (1920)] approaching $f(x)$ on X , except for a set of points of measure zero. A sequence $[\Phi_n(x)]$ of simple functions has property B if for each $\varepsilon > 0$, there exists a number M_ε such that if $I(n, \varepsilon)$ denotes the set of intervals on which $|\Phi_n(x)| > M_\varepsilon$, then $\int_{I(n, \varepsilon)} |\Phi_n(x)| dx < \varepsilon$, $(n = 1, 2, \dots)$,

where $\int_{I(n, \varepsilon)} |\Phi_n(x)| dx$ means the sum of the integrals of $|\Phi_n(x)|$ on the separate intervals of $I(n, \varepsilon)$. A necessary and sufficient condition that a function $f(x)$ be summable (Lebesgue) is that there exist a sequence of simple functions with property B which converges to $F(x)$ almost everywhere in X . If this condition is satisfied,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi_n(x) dx.$$

This establishes a theorem stated by F. Riesz without proof (loc. cit.); a necessary and sufficient condition for the summability of $f(x)$ on X is the existence of a sequence of simple functions converging to $f(x)$ almost everywhere on X , whose indefinite integrals are equi-absolutely continuous. — The following general theorem is of interest. Let $J(a, b)$ be any generalized integral of $f(x)$ over X , such that if c, d, e , are any three points of X , then $J(c, d)$, $J(c, e)$, $J(e, d)$ exist and $J(c, d) = J(c, e) + J(e, d)$. Let E be an everywhere dense subset of X and let M denote the subset of X which has the property that if p is any point of M , then $F(p) = \lim_{q \rightarrow p} J(p, q)/(q - p)$ exists, where q ranges over the set E . There exists a sequence of simple functions $\Phi_n(x)$ converging to $F(x)$ on M and $\int_a^b \Phi_n(x) dx = J(a, b)$, $(n = 1, 2, \dots)$. If $E = X$, M is the

set of points at which $J(a, x)$ has an x -derivative. If $f(x)$ is integrable in the sense of Harnack-Lebesgue, Denjoy, or Lebesgue, E may be any everywhere dense set on X , M is equal to X , except for a set of measure zero, and $F(x) = f(x)$ on M . An application is also made to the Denjoy-Kintchine-Young integral. The set X may be replaced by any measurable set E .
E. W. Chittenden (Iowa).

Young, Rosalind Cecily: On many-valued „inner“ Stieltjes integration. *Math. Z.* 35, 127—153 (1932).

Given two real valued functions $f(t)$ and $g(t)$ defined on a linear interval $a \leq t \leq b$. Let σ denote any subdivision $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$. Then the multiple valued function of the set of all possible σ of (a, b) :

$$F(\sigma) = \sum_{i=1}^n f(\tau_i) (g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$$

gives rise to three notions of limit and consequently of “values approached” (V. A.) which for the case of a finite may be stated: (a) a is a V. A. by $F(\sigma)$ as $N\sigma \rightarrow 0$ ($N\sigma$ is maximum of $t_i - t_{i-1}$), if for every $e > 0$ and $d > 0$, there exists a subdivision σ_1 and a value $F(\sigma_1)$ for which $N\sigma_1 < d$ and $|F(\sigma_1) - a| \leq e$. This is the Riemannian approach. (b) a is a V. A. in the σ sense (called “modified” by the author) if for every $e > 0$ and every σ_0 there exists a $\sigma_1 \geq \sigma_0$ (σ_1 contains all the points of σ_0) and a value $F(\sigma_1)$ such that $|F(\sigma_1) - a| \leq e$. This mode of approach was probably first stressed by E. H. Moore [*Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* 1, 630 (1915)]. (c) a is a V. A. in (σ, N) sense if for every $e > 0$ and $d > 0$ and every σ_0 , there exists a σ_1 and a value $F(\sigma_1)$ for which $N\sigma_1 \leq d$, $\sigma_1 \geq \sigma_0$ and $|F(\sigma_1) - a| \leq e$. The author calls the set of values approached by the above $F(\sigma)$ a multiple valued Stieltjes Integral: $\int f dg$. This paper is concerned primarily with the (c) or (σ, N) manner of approach. The almost immediately evident result is that the multiple valued $\int f dg$ according to the σ and the (σ, N) manner of approach agree and are contained in the integral according to the $N\sigma$ approach. The set of values so obtained is called an “inner” integral. The usual distributive and convergence properties of Stieltjes integrals are then discussed for this inner integral, the results being similar to those for the larger Riemann-Stieltjes ($N\sigma$) case (see this *Zbl.* 2, 250). T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

Labérenne, P.: Sur une fonction admettant une infinité dénombrable de points de discontinuité. *Boll. Un. Mat. Ital.* 11, 87—96 (1932).

Bhar, Santosh Kumar: On a continuous function which has no mean differential coefficient for any value of x . *Bull. Calcutta Math. Soc.* 23, 210—230 (1931).

Analysis.

● **Rothe, Rudolf:** Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. *Tl. 4. Übungsaufgaben mit Lösungen, Formelsammlung.* Unter Mitwirkung v. Oskar Degosang. H. 1. (Teubner's math. Leitfäden. B. 33.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. 52 S. u. 56 Abb. RM. 2.—.

● **Kowalewski, Gerhard:** Interpolation und genäherte Quadratur. Eine Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. V, 146 S. u. 10 Abb. geb. RM. 9.60.

Aus dem Vorwort: „Es hat sich der Gebrauch eingebürgert, Interpolation und genäherte Quadratur im Rahmen der Differenzenrechnung zu behandeln. Daher findet man in den großen Darstellungen der Differential- und Integralrechnung nur kurze Andeutungen darüber. Die berühmte Euler-Maclaurinsche Summenformel ist in vielen dieser sonst sehr reichhaltigen Bücher nicht zu finden. ... Ich löse die beiden Probleme ganz aus der Differenzenrechnung heraus und bringe die Ergebnisse auf eine neue Form, wodurch vor allem genaue Fehlerabschätzungen ermöglicht werden.“ — Zunächst wird die Interpolation durch Polynome behandelt; die Ansätze von Lagrange und Newton, ferner die Herleitung der Interpolationsformeln aus dem Taylorsche Theorem werden von verschiedenen Seiten beleuchtet. Insbesondere wird der Unterschied zwischen Kurven- und Sehnenordinate mit dem Fourierschen Sinuskern in Verbindung gebracht. — Die Newtonschen Quadraturformeln (Trapez-, Simpsonsche, Maclaurinsche Regel, Newtons Lieblingsformel) erfahren eine Darstellung, deren Grundlinien sich in einigen früheren Noten des Verf., insbesondere *Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig* 83, 143—164 (1931) (vgl. dies. *Zbl.* 3, 647) finden. Die methodisch und sachlich neuen Ergebnisse dieses Abschnittes (und der folgenden) sind für den Reinen Mathematiker reizvoll und werden dem anwendenden Mathematiker willkommen sein. Am Schlusse

dieses Abschnittes werden zwei Sätze, mit denen man in der Tat alle bis dahin behandelten Gegenstände beherrscht, als Kernstücke der Theorie herauspräpariert: I. Es lassen sich $n+1$ Konstanten L_0, \dots, L_n und n Polynome $(n+1)$ -ten Grades $\mathfrak{N}_1(u), \dots, \mathfrak{N}_n(u)$ auf eine einzige Weise derart wählen, daß die Gleichung

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x) dx = L_0 f(a_0) + \dots + L_n f(a_n) + \int_{a_0}^{a_1} \mathfrak{N}_1(u) f^{(n+1)}(u) du + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} \mathfrak{N}_n(u) f^{(n+1)}(u) du$$

stattfindet, was auch $f(x)$ sein mag. — II. Wenn a_0, \dots, a_n mit gewissen Gewichten r_0, \dots, r_n belegt sind, die beliebige positive ganze Zahlen sein können, so gibt es n Polynome $\mathfrak{P}_1(u), \dots, \mathfrak{P}_n(u)$ vom Grade $N+1 = r_0 + \dots + r_n$ und außerdem $N+1$ Konstanten $P_{0,0}, P_{0,1}, \dots, P_{n,r_n-1}$, welche zusammen die Gleichung

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^n \{ P_{\nu,0} f(a_\nu) + P_{\nu,1} f'(a_\nu) + \dots + P_{\nu,r_\nu-1} f^{(r_\nu-1)}(a_\nu) \} \\ + \int_{a_0}^{a_1} \mathfrak{P}_1(u) f^{(N+1)}(u) du + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} \mathfrak{P}_n(u) f^{(N+1)}(u) du$$

verwirklichen, was auch $f(x)$ sein mag, und zwar lassen sich die genannten Polynome und Konstanten nur auf eine Weise so wählen, daß diese Gleichung für jedes $f(x)$ stattfindet. — Ein weiterer Abschnitt bringt das Euler-Maclaurinsche und das Boolesche Theorem, eine Erzeugung der Bernoullischen Polynome mittels des Sinus- und eines ähnlichen Kerns, und eine analoge Erzeugung der Eulerschen Polynome. — Schließlich wird die zentrale Stellung der genannten beiden Theoreme weiter hervorgehoben, indem sie ausgiebig als Quelle von Quadraturformeln benutzt werden.

R. Schmidt (Kiel).

Walsh, J. L.: On interpolation and approximation by rational functions with preassigned poles. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 22–74 (1932).

The author considers various problems concerning the approximation of an analytic function $f(z)$ by rational functions of the form

$$f_n(z) = \frac{a_{0n} z^n + a_{1n} z^{n-1} + \dots + a_{nn}}{(z - \alpha_{1n})(z - \alpha_{2n}) \dots (z - \alpha_{nn})},$$

where the poles (α_{in}) are given and the coefficients a_{in} are to be determined. Various cases of sequences $f_n(z)$ are considered: 1) $f_n(z)$ minimizes the integral $\int_{|z|=1} |f(z) - f_n(z)|^p |dz|$

or 2) the integral $\int_{|z| \leq 1} |f(z) - f_n(z)|^p dS$, $p > 0$. 3) $f_n(z)$ interpolates $f(z)$ at the origin, or

at the n -th roots of unity, or at arbitrary given n points. A typical result is as follows: Let $f(z)$ be analytic in $|z| \leq 1$ and let the set α_{in} have no limit points of absolute value less than $A > 1$. If $f_n(z)$ is of best approximation to $f(z)$ in the sense of least squares on $|z| = 1$, then $f_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformly on $|z| \leq 1$. If, in addition, $f(z)$ is analytic on $|z| < T$, $T > 1$, then $f_n(z) \rightarrow f(z)$ on $|z| < R$ and uniformly on every circle $|z| \leq r < R$ where $R = (A^2 T + T + 2A)/(2AT + A^2 + 1)$. Analogous results are obtained for other types of approximating rational functions $f_n(z)$, mentioned above, or in the cases where $f(z)$ is analytic in a region different from the circle with the center at the origin. In the case where α_{in} are allowed to approach the unit circle $|z| = 1$, while $|\alpha_{in}| \geq A_n > 1$, it is shown that $f_n(z)$ still converges to $f(z)$, uniformly on $|z| \leq 1$, provided $n(A_n - 1) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$, this result being the best possible in a certain sense. Several extensions and generalizations are mentioned and discussed.

J. D. Tamarkin (Providence).

Sibirani, Filippo: Una questione relativa all'interpolazione lineare. Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 69–71 (1932).

Si determina un caso in cui si può decidere se dia maggiore approssimazione l'interpolazione lineare od un'interpolazione iperbolica. Autoreferat.

Widder, D. V.: Preliminary note on the inversion of the Laplace integral. (Dep. of Math., Harvard Univ., Cambridge.) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **18**, 181–184 (1932).

Es wird angedeutet, daß das Ergebnis des Verf. (vgl. dies. Zbl. **3**, 302)

sich folgendermaßen verallgemeinern läßt: „Aus (I) $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t) dt$ folgt

$(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k!} f^{(k)}(x) - \varphi(k/x) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, gleichmäßig für $0 \leq x < \infty$, wenn $\varphi(x)$ stetig und (II) $|\varphi(t)| = O(e^{Mt}), t \rightarrow \infty, M > 0$, ist.“ Daraus werden folgende Erweiterungen der von E. Post [Trans. Amer. Math. Soc. **32**, 723 (1930)] herrührenden Umkehrung von (I) ausgeführt: „Aus (I) und (II) folgt $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{f^{(k)}(k/t) k^{k+1}}{k! t^{k+1}}$ erstens, gleichmäßig für $0 \leq t < \infty$, wenn $\varphi(t)$ stetig ist, zweitens, fast überall, wenn $\varphi(t)$ L -integrierbar ist.“ — Weiter werden ähnliche Umkehrungen für Integrale von der Form (III) $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\{a(t)\}$ angegeben, und insbesondere ein sich nicht auf das Momentproblem stützender Beweis der folgenden Sätze skizziert: „Notwendig und hinreichend, um $f(x)$ in der Form (III) darstellen zu können, 1. mit absolut konvergentem Integral, ist daß $\int_x^\infty \frac{u^k}{k!} |f^{(k+1)}(u)| du = O(1), x > 0, k \rightarrow \infty$, 2. mit nicht abnehmendem $a(t)$ ist, daß $f(t)$ vollmonoton sei.“ *Karamata*.

Tamarkin, J. D.: On the compactness of the space L_p . Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 79–84 (1932).

Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit einer Funktionenmenge \mathfrak{F} bei der Konvergenz im Mittel (mit der Potenz $p > 1$). Die Funktionen $f(x)$ der Menge \mathfrak{F} sind dabei im euklidischen n -dimensionalen Raume definiert. Diese Bedingung wurde vom Verf. schon in dem Referat über eine Arbeit des Referenten (vgl. dies. Zbl. **2**, 385) angezeigt. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Pennell, W. O.: The use of fractional integration and differentiation for obtaining certain expansions in terms of Bessel functions or of sines and cosines. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 115–122 (1932).

In this paper the author makes use of the identities:

$$p^{-\nu+\frac{1}{2}} \sin ax^{\frac{1}{2}} = (2/a)^{\nu-1} \pi^{\frac{1}{2}} x^{\nu/2} J_\nu(ax^{\frac{1}{2}}),$$

$$p^{-\nu+\frac{1}{2}} \cos ax^{\frac{1}{2}} = [x^{\nu-\frac{1}{2}}/\Gamma(\nu+\frac{1}{2})] - (2/a)^{\nu-1} \pi^{\frac{1}{2}} x^{\nu/2} H_\nu(ax^{\frac{1}{2}}),$$

where $J_\nu(z)$ is the Bessel function of order ν , $H_\nu(z)$ the Struve function of order ν , and $p^{-\mu} f(x)$, $p = d/dx$, the fractional integral (or derivative) of $f(x)$, in order to convert the Fourier-series expansion of an arbitrary function into an equivalent expansion in terms of Bessel and Struve functions. Employing the identity: $p^\mu p^{-\mu} f(x) = f(x)$, in order to invert the operators just written down, the author also converts the Fourier-

Bessel-series, $f(x) = \sum_{m=1}^\infty a_m J_\nu(j_m x)$, $0 < x < 1, \nu \geq -\frac{1}{2}, J_\nu(j_m) = 0$, into a non-periodic expansion the elements of which are $\sin(j_m x)$. Convergence properties of the series are also discussed. *H. T. Davis* (Bloomington [U. S. A.]).

Scatizzi, Pio: Pseudo-Euleriana e sue applicazioni. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei **84**, 593–610 (1931).

Verf. verwendet elementare Mittel und die Riemannsche Methode der Differentiation mit nicht ganzen Exponenten, um Eigenschaften der unvollständigen Gammafunktion $\Gamma(x, y) = \int_x^\infty e^{-\vartheta} \vartheta^{y-1} d\vartheta$ ($Q(y, x)$ in der Bezeichnung von N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924) zu gewinnen. *K. Mahler*.

Broggi, U.: Sullo sviluppo di $\sum_{n=0}^\infty \left[b_n \left(\sum_{h=0}^\infty a_h x^h \right)^n \right]$ in serie di potenze crescenti di x . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 122–125 (1932).

Explizite Ausdrücke für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\left(\sum_{n=0}^\infty a_n x^n \right)^p$, mit p rational. Gleiche Frage für die Koeffizienten der im Titel erwähnten Potenzreihe. *G. Cimmino* (Napoli).

Mandelbrojt: Théorèmes sur la convergence des séries de Taylor lacunaires. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 824—827 (1932).

L'auteur démontre quelques théorèmes concernant les fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ et définies par les séries de Taylor lacunaires: $f(z) = \sum a_n z^{\lambda_n}$ ($\lambda_{n+1}/\lambda_n > \lambda > 1$). En particulier on a les propositions suivantes: 1° Si $f(z)$ est bornée dans le domaine $|z - 1| < \delta$, $|z| < 1$, alors $a_n = O(1)$. 2° Si dans le domaine ci-dessus on a $|f(z) - C| < [\log 1/\delta]^{-2-\gamma}$ ($\gamma > 0$), la série $\sum |a_n|$ converge. On peut démontrer (voir Zbl. **3**, 253) que déjà l'hypothèse de la proposition 1° entraîne la convergence de la série $\sum |a_n|$. A. Zygmund (Wilno).

Gagaëff, B.: Über Sturm-Liouvillesche Reihen mit Lücken. J. reine angew. Math. **166**, 204—207 (1932).

Mit Hilfe einer bekannten asymptotischen Abschätzung für Sturm-Liouvillesche Funktionen $\varphi_k(x)$ wird ein Satz von Sidon über trigonometrische Reihen auf Reihen $\sum c_v \varphi_v(x)$ übertragen. Sei $q > 1$ und seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ ganze positive, der Bedingung $\lambda_{k+1}/\lambda_k > q$ genügende Zahlen; dann ist für alle m und beliebige reelle a_k

$$\int_0^\pi \left| \sum a_k \varphi_{\lambda_k}(x) \right| dx > C \sqrt{\sum_1^m a_k^2},$$

wobei $C > 0$ nur von q abhängt. Soviel ich sehe, enthält jedoch der Schluß des Beweises eine Lücke. Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Leja, F.: Sur une famille de séries trigonométriques doubles. Bull. Soc. Math. France **59**, 119—127 (1931).

L'auteur donne des conditions pour la convergence de

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu)!}{\mu! \nu!} \frac{r^\mu s^\nu}{\mu + \nu} e^{i(\mu\alpha + \nu\beta)}, \quad r + s = 1, \quad \nu \geq 0, \quad s \geq 0. \quad (\text{on exclut } \mu = \nu = 0) \quad (1)$$

Si $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, (1) converge si $r\alpha + s\beta > 0$ et diverge si $r\alpha + s\beta = 0$. La convergence ne peut pas être absolue. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Verblunsky, S.: Note on the integration of trigonometric series. Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 409—419 (1932).

It has been proved [Hobson, J. London Math. Soc. **2**, 164—166 (1927)] that if a trigonometric series $a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converges in an interval (α, β) to a function $f(x)$ integrable L , the series may be integrated formally in every interval (x_1, x_2) ($\alpha < x_1 < x_2 < \beta$) and the resulting series converges to the integral of $f(x)$ over (x_1, x_2) . The author generalises the theorem in various ways by considering trigonometric series summable by Poisson's method and with coefficients not necessarily tending to zero. A. Zygmund (Wilno).

Wiener, Norbert: Tauberian theorems. Ann. of Math., II. s. **33**, 1—100 (1932).

Nachdem N. Wiener in einer früheren Abhandlung [J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **8**, 161—184 (1928)] die Theorie der Fourierschen Transformierten in den Problemkreis der Mittelungsumkehrsätze (Tauberian theorems) eingeführt hatte, wird hier der gleiche Gegenstand ausführlicher und auf einer breiteren Basis erneut behandelt. Dadurch gewinnt die Wiener'sche Schlußweise zwar an Länge, aber auch an Durchsichtigkeit. Die verbreiterte Basis wird im Kap. I entwickelt: Neben einer Funktion $f(x)$, die in $-\infty < x < +\infty$ zur Lebesgueschen Klasse L_2 gehört, wird die Verschiebungsmenge (class of translations) $f(x + \lambda)$ betrachtet und hinsichtlich ihrer Vollständigkeit (closure) untersucht; die Menge wird als vollständig bezeichnet, wenn für jede Funktion $F(x)$ aus L_2 und jedes $\varepsilon > 0$ eine Linearverbindung

$$\Phi(x) = A_1 f(x + \lambda_1) + \dots + A_u f(x + \lambda_u) \quad \text{vorhanden ist derart, daß} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - \Phi(x)|^2 \leq \varepsilon^2$$

ausfällt. Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit ergibt sich, daß die reellen Nullstellen der Fourierschen Transformierten von $f(x)$,

$$g(u) \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} f(x) e^{iux} dx,$$

das Maß Null haben. — Für die Theorie der Mittelungsumkehrsätze von zentraler Bedeutung ist die schwieriger zu beweisende entsprechende Aussage für die Klasse L_1 . Dort erhält man als notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit, daß die Fouriersche Transformierte keine reellen Nullstellen besitzt. — Kap. II liefert den Satz, der zusammen mit den Ergebnissen des Kap. I alles Wesentliche zur Erledigung der Mittelungsumkehrsätze ausmacht: Es sei $f(x)$ beschränkt und meßbar, $K(x)$ aus L_1 , und die Fouriersche Transformierte von $K(x)$ besitze keine reellen Nullstellen. Es sei ferner

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) K(\xi - x) d\xi = A \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) d(\xi). \quad (*)$$

Dann ist für jede Funktion $K(x)$ aus L_1 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) K(\xi - x) d\xi = A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) d(\xi). \quad (**)$$

Vom methodischen Standpunkte aus ist es von größter Wichtigkeit, daß dieser Satz sich umkehren läßt: Wenn unter sonst gleichen Voraussetzungen aus (*) immer (**) folgt, dann besitzt die Fouriersche Transformierte von $K(x)$ keine reellen Nullstellen. In der Tat besagen Satz und Umkehrung zusammen in verkappter Form, daß die Wiener'schen Bedingungen für die Gültigkeit eines Umkehrsatzes nicht bloß hinreichend, sondern (mit nebensächlichen Einschränkungen) auch notwendig sind. — Die weiteren Entwicklungen bringen Anwendungen der allgemeinen Theorie zur Gewinnung der bekannten und einiger neuen Umkehrsätze, ferner des Primzahlsatzes auf dem direkten Wege über Lambertsche Reihen, ein Weg übrigens, der sich wesentlich von dem unterscheidet, der in der genannten früheren Note des Verf. eingeschlagen wurde. Hier wie dort sind die funktionentheoretischen Hilfsmittel die gleichen: Regularität von $\zeta(z)$ auf $\sigma = 1$, mit Ausnahme der Stelle $z = 1$, und Nullstellenfreiheit von $\zeta(z)$ auf $\sigma = 1$. [In der vorliegenden und der früheren Note des Verf. findet sich die Bemerkung, Hardy und Littlewood hätten die Äquivalenz des Primzahlsatzes mit dem Umkehrsatze für Lambertsche Reihen bewiesen; dies ist dahin zu berichtigen, daß aus dem $O - L \rightarrow K$ -Satze zwar sofort der Primzahlsatz in der Gestalt

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$ folgt, daß aber Hardy und Littlewood zum Beweise des Umkehrsatzes wesentlich mehr benutzt haben als den Primzahlsatz, nämlich $\sum_{n=1}^m \frac{\mu(n)}{n} = O\left(\frac{1}{(\lg m)^2}\right)$. — Neben

weitgehenden Verschärfungen der Methode und Erweiterungen der Problemstellung werden insbesondere Fragen der Summation trigonometrischer Entwicklungen behandelt.

R. Schmidt (Kiel).

Obrechhoff, N.: Sur une généralisation de la sommation de M. Borel des séries divergentes. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 39—43 (1932).

La série $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ est dite sommable $C_\alpha B_k$, $\alpha \geq 0$ si

$$\alpha x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f_k(t) dt \quad \text{où} \quad f_k(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}$$

tend vers une limite lorsque $x \rightarrow \infty$ ($s_n = \sum_0^n a_m$, f_k converge pour tout x fini). L'auteur démontre que cette sommation possède les propriétés habituelles des sommations. Elle contient celle des Doetsch et celle de Sannia et Knopp. *Mandelbrojt.*

Offord, A. C.: On the summability of power series. Proc. London Math Soc., II. s. 33, 467—480 (1932).

The author 1° gives a necessary and sufficient condition for the summability (C, γ) of the power series $f(z) = \sum a_n z^n$, $a_n = o(n^\gamma)$ ($\gamma > -1$) on the circle $|z| = 1$, 2° applies the condition to obtain some (mostly known) theorems on the summability of power series, bounded (or even satisfying a less stringent condition) in a sector of the circle. *A. Zygmund (Wilno).*

Winn, C. E.: Sur l'oscillation des moyennes de Hölder et de Cesàro. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1057—1060 (1932).

Seien s'_n bzw. s''_n die ersten bzw. zweiten Hölderschen Mittel einer Folge s_n . Wenn $\lim s_n = B$, $\lim s_n = A$, $\lim s'_n = \beta$, $\lim s''_n = \alpha$ ($B > \alpha$, $\beta > A$) gegeben sind, so

werden die Oszillationsgrenzen der Folge s'_n , also die genauen Schranken für $\lim s'_n = b$, $\lim s'_n = a$ bestimmt. Dieses interessante Resultat ergibt sich durch elementare Rechnung. *Otto Szász* (Frankfurt a. M.).

Rutledge, George: The inverse matrix for de la Vallée-Poussin summation. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **11**, 73–82 (1932).

Für die Reihentransformation von de la Vallée-Poussin,

$$V_n = u_0 + \sum_{\nu=1}^n \frac{\binom{2n}{n-\nu}}{\binom{2n}{n}} u_\nu,$$

wird die inverse Transformation explizit angegeben:

$$u_n = (-1)^n \cdot 2 \cdot \left\{ V_0 + \sum_{\nu=1}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \binom{n+\nu-1}{\nu} V_\nu \right\}.$$

Als Anwendung wird der Zusammenhang zwischen den Transformierten der Reihen $\sum_1^\infty u_\nu$ und $\sum_1^\infty r_\nu u_\nu$ untersucht. *R. Schmidt* (Kiel).

Differentialgleichungen:

Whittaker, J. M.: The composition of linear differential systems. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **3**, 10–15 (1932).

Es seien

$$P = \frac{d^p}{dx^p} + p_1(x) \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} + \dots + p_p(x)$$

und

$$Q = \frac{d^q}{dx^q} + q_1(x) \frac{d^{q-1}}{dx^{q-1}} + \dots + q_q(x)$$

zwei Differentialoperatoren. Zu den beiden für das Intervall $a \leq x \leq b$ gestellten Randwertproblemen

$$Qy = 0, \quad [C_i y]_a + [D_i y]_b = 0 \quad i = 1, 2, \dots, q$$

und

$$Py = 0, \quad [A_i y]_a + [B_i y]_b = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

(A_i, B_i, C_i, D_i sind wieder gewisse lineare Differentialoperatoren) wird das zusammengesetzte Problem

$$\begin{aligned} PQy &= 0, \\ [A_i Qy]_a + [B_i Qy]_b &= 0, & i = 1, 2, \dots, p \\ [C_i y]_a + [D_i y]_b &= 0, & i = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

betrachtet, und es wird eine Reihe von Theoremen abgeleitet, die der Ermittlung von Greenscher Funktion und Lösung des zusammengesetzten Problems aus denen der ursprünglichen Randwertprobleme dienen. *Rellich* (Göttingen).

Nakano, Hidegorô: Über die Verteilung der Peanoschen Punkte einer Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. (Math. Inst., Kais. Univ. Tokyo.) Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **14**, 41–43 (1932).

Soit F une famille de fonctions continues dans un entourage U de l'origine, telle que, pour chaque deux fonctions différentes f_1, f_2 de F , $f_1(x, y) \neq f_2(x, y)$ partout dans U . L'auteur prouve que sous ces conditions l'ensemble des fonctions $f \leq F$ pour lesquelles l'équation $y' = f(x, y)$ possède plus qu'une solution passant par l'origine, est au plus dénombrable. Quelques applications de ce théorème concernant les points de Peano des équations différentielles vérifiant certaines spéciales conditions, sont signalées. *Saks* (Providence).

Kamke, E.: Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. II. Acta math. (Uppsala) **58**, 57–85 (1932).

L'auteur poursuit ses recherches sur les propriétés élémentaires des solutions des équations différentielles de 1^{er} ordre sans aucune autre hypothèse que la continuité des seconds membres. Certains résultats concernant les solutions d'une seule équation $y' = f(x, y)$ sont étendus

aux systèmes S de n équations $y'_\nu = f_\nu(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) (f_ν étant continues dans un domaine D de (x, y_1, \dots, y_n)) et certaines propositions connues „im Kleinen“ sont généralisées „im Großen“; p. ex. le théorème de M. Kneser d'après lequel les courbes intégrales du système S issues d'un point $P(\xi_0, \eta_{01}, \dots, \eta_{0n})$ de D coupent chaque plan $x=c$, suffisamment près de P_0 , suivant un continu est étendu à toutes les valeurs c d'un intervalle ouvert (a, b) ($a < \xi_0 < b$) dans la seule condition que toutes les courbes intégrales issues de ξ_ν existent dans tout cet intervalle. Ce résultat ainsi que quelques autres sont liés à la notion de l'„Integraltrichter“ $\mathfrak{T}(P_0)$ c.-à.-d. de l'ensemble des courbes intégrales partant d'un point $P_0(\xi_0, \eta_{01}, \dots, \eta_{0n})$ du domaine D . Lorsque toutes ces courbes existent dans un intervalle ouvert $(a < \xi_0 < b)$, alors par chaque point frontière de la partie de l'„Integraltrichter“ $\mathfrak{T}(P_0)$ relative à l'intervalle (a, b) , passe une courbe intégrale qui contient P_0 et est contenue elle-même dans la frontière de $\mathfrak{T}(P_0)$ (théorème de M. Fukuhara, nouvelle démonstration de M. Kamke). Ensuite l'ancien théorème (de Osgood-Montel) sur l'existence des intégrales supérieure et inférieure parmi des solutions d'une seule équation différentielle issues d'un même point, est étendu aux systèmes des équations, d'ailleurs dans des conditions assez spéciales: $P(\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ étant considéré comme le sommet d'un „Integraltrichter“, les fonctions $f_\nu(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sont supposées ici d'être monotones croissantes lorsque $x \geq \xi$, et monotones décroissantes lorsque $x \leq \xi$ par rapport à chaque variable y_k telle que $k \neq \nu$. Saks (Providence).

Kamke, E.: Über die Integralkurven von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 41, 158—164 (1932).

L'auteur se plaçant dans l'ordre d'idées du théorème classique de M. Peano, passe en revue les résultats ultérieurs de Montel, Fukuhara, H. Kneser et les siens concernant l'allure des solutions de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ et des systèmes des équations $y'_\nu = f_\nu(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$); les fonctions f_ν ne sont supposées que d'être continues. (Voir la revue précédente.) Saks (Providence).

Denjoy, Arnaud: Sur les caractéristiques à la surface du tore. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 830—833 (1932).

Es bedeuten Φ und θ gewöhnliche Winkelkoordinaten auf dem Torus und in der Differentialgleichung $d\theta/d\Phi = A(\Phi, \theta)$ genüge $A(\Phi, \theta)$ der Lipschitz-Bedingung: $|A(\Phi, \theta_2) - A(\Phi, \theta_1)| < K|\theta_2 - \theta_1|$. Es sei $\theta = u(\Phi, \theta_0)$ ($-\infty < \Phi < +\infty$) die Integralkurve auf dem Torus mit der Anfangsbedingung $u(\Phi_0, \theta_0) = \theta_0$. Die Schnittpunkte eines längs dieser Integralkurve sich bewegendes Punktes mit dem Meridian $\Phi = \Phi_0$ seien $\dots M_{-n}, M_{-n+1}, \dots, M_0, M_1, \dots, M_n \dots$ und Φ_n, θ_n die Koordinaten von M_n . Es existiert bekanntlich eine reelle Zahl α mit der Eigenschaft $-\beta_n \leq \theta_n - 2n\pi\alpha - \theta_0 \leq \gamma_n$ ($0 \leq \beta_n, 0 \leq \gamma_n, \beta_n + \gamma_n < 2\pi$). Ist α rational, so existiert eine geschlossene Integralkurve. Für irrationales α hat jede Integralkurve unendlich viele verschiedene Schnittpunkte mit jedem Meridian. Poincaré hat die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, daß die durch Hinzufügung der Häufungspunkte der Schnittpunktmenge entstehende perfekte Menge nirgends dicht auf dem Meridian sei, wenn man $A(\Phi, \theta)$ in beiden Veränderlichen regulär analytisch voraussetzt. — Der Verf. beweist den Satz: ist $d\theta_1/d\theta_0$ von beschränkter Variation, wenn θ_0 sich auf dem Meridian bewegt, so liegen die Schnittpunkte mit jeder Integralkurve auf diesem Meridian (für irrationales α) überall dicht. Insbesondere gilt dies für regulär analytische $A(\Phi, \theta)$. Hiermit ist das Poincarésche Problem gelöst. Dagegen ist es möglich, ein Beispiel mit nur stetigem $d\theta_1/d\theta_0$ aufzustellen, wo die oben definierte perfekte Menge nirgends dicht ist. L. Schnirelmann (Moskau).

● **Le Corbeiller, Ph.:** Les systèmes autoentretenus et les oscillations de relaxation. (Conférences d'actual. scient. et industr. Nr. 27.) Paris: Hermann & Cie. 1931. 46 S.

In diesem Buch wird eine Reihe von autoschwingenden Systemen einfachster Form, wie mechanischer, elektrotechnischer und radiotechnischer betrachtet. Hauptsächlich wird die physikalische Seite ins Auge gefaßt. Verf. reproduziert mit einigen Ergänzungen die Diskussion der Differentialgleichung $L \frac{d^2 i}{dt^2} + f(i) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$ nach van der Pohl (Z. Hochfrequenztechn. 1926, 178) und Lienard (Rev. gén. Electr. 1928, 901). Zum Schluß wird eine kurze historische Übersicht angegeben.

A. Andronow und A. Witt (Moskau).

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliuboff: Sur le phénomène de l'entraînement en radio-technique. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 1064—1066 (1932).

Es werden die von den Verff. ausgearbeiteten Methoden der Auffindung quasi-periodischer Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen zur Theorie des Mitnehmens im Gebiete der Hauptresonanz angewandt. (Die Mitnahmeerscheinung besteht darin, daß in autoschwingenden Systemen unter der Einwirkung einer äußeren periodischen Kraft nur für gewisse Frequenzintervalle stabile periodische Bewegungen vorhanden sind; zu beiden Seiten dieses Intervalls setzen Schwebungsbewegungen [quasiperiodische Bewegungen] ein; die beiden Bewegungsarten können sich auch teilweise überdecken. Referenten.) Die Stabilität der gefundenen Lösungen wird nicht untersucht.

A. Andronow und A. Witt (Moskau).

Kourensky, M.: L'intégration des équations, qui déterminent les fonctions conjuguées de Beltrami. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **14**, 482—487 (1931).

This note deals with the determination of conjugate solutions φ, ψ of Beltrami's equation $\Delta_2 \varphi = 0$ for any surface. The system of linear partial differential equations of the first order for φ, ψ is treated by the general methods for such systems developed by Hamburger and the author, whereby the fact is confirmed that the determination of φ, ψ depends on the integration of the ordinary differential equation defining the minimal lines of the surface.

Douglas (Cambridge, Mass.).

Funk, P.: Bemerkungen zur praktischen Berechnung des kleinsten Eigenwertes. Sonderdruck aus: Hauptver. Deutsch. Ing. Tschechoslowak. Republ., Mitt. H. **21/22**, 10 S. (1931).

Durch die bekannte Minimaleigenschaft erhält man obere Schranken für die Eigenwerte, aber bei Abhängigkeit von mehreren kennzeichnenden Parametern meist recht unübersichtliche Ausdrücke. Vereinfachungen und erhebliche Verbesserungen können manchmal durch Einführung geeigneter neuer Veränderlicher gewonnen werden, so z. B. bei der Knickung durch Einführung der Momente statt der Durchbiegungen. — Daneben hat sich die Methode der sukzessiven Approximationen nach H. A. Schwarz eingebürgert, aus der sich untere Schranken für die Eigenwerte gewinnen lassen. Diese Methode hat den Vorteil, die Abhängigkeit von den Parametern in übersichtlicherer Form zu liefern. — Eine dritte Methode geht auf Lord Rayleigh zurück und wird als „Störungstheorie“ bezeichnet; sie wurde zuerst gelegentlich der Frage ausgeführt, welchen Einfluß kleine Inhomogenitäten auf den Grundton einer Saite haben. Diese Methode kann erweitert werden, um einen auf irgendeine Weise angenähert erhaltenen Eigenwert zu verbessern.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Operatoren:

● **Berg, E. J.: Rechnung mit Operatoren nach Oliver Heaviside. Ihre Anwendung in Technik und Physik.** Dtsch. Bearb. v. Otto Gramisch u. Hans Tropper. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1932. X, 188 S. u. 65 Abb. RM. 10.—.

This is an easily readable and practical account of Heaviside's methods of solving ordinary and partial differential equations with constant coefficients. The principal result of the first fourteen chapters is the Expansion Theorem and examples of its application are worked out in detail. Whilst the emphasis is on applications to electric circuits several problems of vibrations of mechanical systems are fully discussed. The next chapter is devoted to what the author terms „Duhamel's Integral“; this is more widely known as the Boltzmann-Hopkinson Principle of Superposition. As far as this part of the book is concerned a mathematician would doubtless feel that nothing is gained by the Operational Method (which is in fact merely an application of the Neumann method of successive approximations). The Expansion Theorem and the Principle of Superposition are immediate consequences of Cauchy's method of solving linear differential equations [see a note by the reviewer in Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 81 bis 89 (1927)]. Heaviside's unit function which is in some respects mysterious to the author (he says that „neither Heaviside, nor anyone else, has shown how one may interpret its square“ p. 25) is merely a device to avoid introducing the initial condition that the dependent variable is to be zero when the independent variable t is zero (it being tacitly assumed that

the dependent variable is zero when $t = -\infty$). However the next part of the book (chapters 16—23), in which the theory of propagation of electric waves along a cable (and in particular the theory of the distortionless cable, which was Heaviside's greatest contribution to knowledge) shows adequately the power of his methods. Here partial differential equations, with constant coefficients, are involved and the classical methods do not furnish as readily as does the operational calculus the particular solutions desired. In the remaining chapters such matters as fractional differentiation and integration, asymptotic expansions, heat conduction are treated. Although not directly connected with the subject matter of the book there is a chapter devoted to Graeffe's successive-squaring method of approximating to the roots, real or complex, of an algebraic equation with real coefficients. The book concludes with a very interesting account of the life and personal characteristics of Heaviside (written by B. A. Behrend).

Murnaghan (Baltimore).

Pincherle, Salvatore: Un'applicazione del metodo simbolico. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 72—74 (1932).

Giovandosi dell'identità fra due sviluppi in serie di potenze, si dà una relazione simbolica notevole fra due espressioni di un operatore differenziale lineare d'ordine infinito.

Autoreferat.

Kennison, L. S.: Reflections in function space. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 131 bis 134 (1932).

This paper shows that if the kernel $K(x, y)$ of the Fredholm functional transformation $y(x) + \int_a^b K(x, s) y(s) ds$ satisfies the equations

$$K(x, s) + K(s, x) = - \int K(x, u) K(s, u) du = - \int K(u, x) K(u, s) du$$

then it is the product of n ($n \geq 0$) transformations of the form $y(x) - 2 \int f(x) f(s) y(s) ds$, ($f(x)$ normed) into a transformation $y(x) + \int H(x, s) y(s) ds$, where $H(x, s)$ is the value of the resolvent $H(x, s; \lambda)$ of a skew symmetric kernel $h(x, y)$ for $\lambda = -\frac{1}{2}$. This result corrects one due to Delsarte [Ann. de Toul. 20, 47 ff. (1928)] which omitted the transformations of the first type, called by the author functional reflections.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Poole, E. G. C.: Spherical harmonics having polyhedral symmetry. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 435—456 (1932).

Es werden diejenigen harmonischen Polynome $H_n(x, y, z)$ bestimmt, die dieselben Symmetrieebenen haben, wie einer der fünf regulären Körper. Die Fragestellung wird durch ein elektrostatisches Problem nahegelegt. Die Lösung wird mit Hilfe der homogenen Operatoren von Maxwell und Sylvester durchgeführt; einem harmonischen Polynom, das bei gewissen orthogonalen Transformationen invariant ist, entspricht ein invarianter Operator.

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Funktionentheorie:

● **Hurwitz, Adolf: Mathematische Werke.** Hrsg. v. d. Abt. f. Math. u. Phys. d. Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. Bd. 1. Funktionentheorie. Basel: Emil Birkhäuser & Cie. 1932. XXIV, 734 S. u. 23 Fig. Frs. 40.—.

Belinfante, M. J.: Über die Elemente der Funktionentheorie und die Picardschen Sätze in der intuitionistischen Mathematik. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 34, 1395—1397 (1931).

Es werden die Bedingungen angegeben, unter denen in der intuitionistischen Mathematik die Hauptsätze der komplexen Funktionentheorie gelten. Unter Beschränkung auf gleichmäßig differenzierbare Funktionen gelten die Cauchyschen Integralsätze und die Taylorsche Reihe. Die Sätze über das Integral der logarithmischen Ableitung und über den Maximalwert des absoluten Betrags müssen ein wenig anders formuliert werden. Der Weierstrasssche Unbestimmtheitssatz und der Picardsche Satz gelten fast uneingeschränkt; sie werden von klassisch mit ihnen gleichbedeutenden Nebensätzen begleitet. Die Beweise werden später nachgeholt.

A. Heyting.

Ketchum, P. W., and Ted Martin: Polygenic functions of hypercomplex variables. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 66—72 (1932).

Recent results of Kasner [Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 14, 75—82 (1928)] on polygenic functions of a complex variable z are here extended to functions of the general hypercomplex variable

$$w = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad e_i e_j = \sum_{s=1}^n \gamma_{ijs} e_s, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

where the units e_i are linearly independent with respect to the complex domain, the constants γ_{ijs} are real numbers, and the x 's are complex variables. The authors consider the polygenic function

$$f(w) = \sum_{i=1}^n e_i f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

where the f_i are functions possessing continuous derivatives of the first order with respect to each of the x_j . Then we have two derivatives, the left-hand and the right-hand respectively, defined by the equations $df = f' dw$ and $df = dw f'$ and depending on the direction of approach of the increment to zero. If the algebra is commutative the two derivatives are equal. But the authors do not assume commutativity. The Kasner derivative congruence of circles, defined by Kasner for the case of functions of a complex variable, is here generalized to the case of functions of the hypercomplex variable w , and the properties of this congruence are investigated. *Carmichael.*

Bernstein, Vladimiro: Sulla crescita delle funzioni olomorfe di tipo esponenziale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 30—34 (1932).

D'après un théorème connu de Phragmen-Lindelöf (Acta math. I 31, 393), on sait que si dans le secteur $|\arg z| \leq \varphi_0$

$$|f(z)| \leq e^{A|z|}, \quad z = re^{i\varphi},$$

alors on a, en posant $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r} = a$,

$$h(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r} \leq a \cos \varphi + b \sin |\varphi|. \quad (1)$$

L'auteur démontre que si pour une suite $\{\varrho_n\}$ telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{\varrho_m} = d > 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (\varrho_{m+1} - \varrho_m) = q > 0$$

on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |f(\varrho_m)|}{\varrho_m} = a - k, \quad (k > 0)$$

alors $b \geq \pi d$ (b intervient dans (1)). — Pour le démontrer l'auteur s'appuie sur ses Mémoires précédents [Rend. R. Ist. Lomb. 63 (1930); 64 (1931)] sur une formule de Carlson [Math. Ann. 79 (1919)] et sur le théorème cité de Phragmen-Lindelöf. Ce théorème constitue une généralisation d'un théorème connu où l'on suppose $|\varphi_0| \leq \pi$ (voir Zbl. 3, 342). *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Julia, Gaston: Sur une représentation conforme canonique des aires multiplement connexes. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 819—822 (1932).

Mit Hilfe der vom Verf. (vgl. dies. Zbl. 3, 403) eingeführten Fortsetzung σ_1 der Riemannschen Fläche σ , auf welche ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet konform abgebildet werden kann, erhält der Verf. zwei kanonische Abbildungen des genannten Gebietes: 1. auf ein Gebiet D , das von einer äußeren und p inneren Cassinischen Kurven begrenzt wird; 2. auf ein Gebiet D' , das von einem äußeren und p inneren verallgemeinerten Cassinischen Ovalen im Inneren des Einheitskreises begrenzt wird. — Diese Abbildungen haben die fundamentale Eigenschaft, daß die erhaltenen Bilder von zwei aufeinander konform abbildbaren Gebieten im ersten Falle euklidisch kongruent, im zweiten Falle nichteuklidisch kongruent in der vom Einheitskreise gebildeten nichteuklidischen Ebene sind. *Ahlfors* (Paris).

Wirtinger, W.: Bemerkungen über das Integral $\int_0^\infty z^s e^{-e^z} dz$. Mh. Math. Phys. **39**, 239—240 (1932).

In der Potenzreihe $e^{-e^z} = e^{-1} \sum_{\nu=0}^\infty c_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}$ sind die Koeffizienten c_ν ganzrational und speziell $c_2 = 0$. Die Funktion

$$G_1(s) = \int_0^1 z^s e^{-e^z} dz = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{c_\nu}{\nu!} \frac{1}{s + \nu + 1}$$

ist meromorph mit einfachen Polen bei den Stellen $-\nu - 1 = -1, -2, \dots$, für die c_ν nicht verschwindet. Die Funktion

$$G_2(s) = \int_1^\infty z^s e^{-e^z} dz = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(s+1)^\nu}{\nu!} K(\nu), \quad K(\nu) = \int_0^\infty t^\nu e^{-e^t} dt$$

dagegen ist ganz transzendent. Das Integral

$$G(s) = \int_0^\infty z^s e^{-e^z} dz = G_1(s) + G_2(s)$$

ist folglich auch meromorph mit den gleichen Polen wie $G_1(s)$. Mahler (Göttingen).

Falckenberg, Hans: Analogon zu den Kleinschen Ergänzungsrelationen im Falle komplexer Exponenten der Schwarzschen s -Funktion. Math. Ann. **106**, 395—399 (1932).

Bekanntlich können die Seiten desjenigen Kreisbogendreiecks, auf welches die positive oder negative Halbebene durch die Schwarzsche s -Funktion mit reellen Exponenten abgebildet wird, nicht eindeutig durch die Formeln der sphärischen Trigonometrie bestimmt werden. Zur Festlegung der in den Seiten enthaltenen unbestimmten Vielfachen von 2π hat Klein seine „Ergänzungsrelationen“ abgeleitet, welche die Forderung des einfachen Zusammenhangs für die Dreiecksfläche aussprechen. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie die fraglichen Relationen auf den Fall der komplexen Exponenten übertragen werden können. Myrberg (Helsinki).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik:

Tricomi, F.: Le variabili casuali. Period. Mat., IV. s. **12**, 65—86 (1932).

Kurzer Bericht in Vorlesungsform über die Grundbegriffe und Hauptsätze der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von den Begriffen der zufälligen Variablen und des allgemeinen Verteilungsgesetzes ausgehend, erläutert Verf. das Momentenproblem, die Theorie der charakteristischen Funktionen, gewöhnliches und starkes Gesetz der großen Zahlen, Gesetz des iterierten Logarithmus, Gauss-Laplacesches Grenzwerttheorem mit seinen Verallgemeinerungen u. dgl. m. Zum Schluß wird die Wichtigkeit des Begriffs der gegenseitigen Abhängigkeit von Verteilungsgesetzen für die moderne theoretische Physik hervorgehoben. A. Khintchine (Moskau).

Wiener, Norbert: A new deduction of the Gaussian distribution. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **10**, 284—288 (1931).

Mit Hilfe Laplacescher Transformation beweist Verf. folgende Eigenschaft der Gaußschen Verteilung: die Funktion $f(x, a)$ sei für $-\infty < x < \infty$, $0 < a < A$ definiert, nichtnegativ und gerade in bezug auf x ; die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, a) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, a) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, a)]^2 dx$$

seien endlich; ferner sei $\lim_{a \rightarrow 0} f(x, a) = 0$ ($x \neq 0$) und im Fall $a + b < A$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, a) f(y - x, b) dx = f(y, a + b);$$

dann ist

$$f(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi H a}} e^{-\frac{x^2}{4 H a}},$$

wo H eine positive Konstante bedeutet.

A. Khintchine (Moskau).

Schive, J.: The „natural“ measure of precision. Bull. géodés. Nr 30, 161–164 (1931).

Für zwei Meßreihen ergeben sich ganz verschiedene Werte für die Genauigkeit, je nachdem, welche Größe man als Maß der Präzision verwendet. Es wird gezeigt, daß unter den verschiedenen Genauigkeitsmaßen der mittlere Fehler ebenso eine Sonderstellung einnimmt wie beispielsweise das Fehlergesetz von Gauss unter den übrigen Fehlergesetzen.

G. Koehler (Darmstadt).

Münzner, Hans: Das Fehlergesetz des mittleren Fehlers und seine Anwendung. Bl. Versich.-Math. 2, 237–241 (1932).

Der Verf. bespricht Arbeiten von „Student“ in den Biometrika und von R.A. Fisher im Metron 1925. In diesen Arbeiten wird ein Fehlergesetz für den mittleren Fehler unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Fehler der einzelnen Beobachtungen dem Gesetze von Gauss folgen. Das Fehlergesetz wird dann auf den Vergleich zweier statistischer Reihen angewandt. Ist \bar{x} das arithmetische Mittel der n Beobachtungen x_i ($i = 1, \dots, n$) einer Serie, x^0 der (theoretische) Mittelwert der Beobachtungsergebnisse, $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$ das mittlere Fehlerquadrat von x in einer Serie und

$s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}$ der mittlere Fehler von \bar{x} , so wird ein Gesetz für $t = (\bar{x} - x^0)/s_{\bar{x}}$ gesucht. Es wird das Fehlergesetz

$$df = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2} dt$$

gefunden, welches für $\lim n = \infty$ in das Gaussche übergeht. *Sternberg* (Breslau).

Montessus de Ballore, de: Statistique mathématique. Problèmes de degrés supérieurs. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. A 52, 22–26 (1932).

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage behandelt, wie man die charakteristischen Konstanten h_α , m_α , p_α , N_α der Glieder einer Verteilungsfunktion

$$V_n = \sum \alpha Y_{n+h_\alpha}^{(\alpha)}; Y_{n+h_\alpha}^{(\alpha)} = N_\alpha \frac{m_\alpha!}{(m_\alpha p_\alpha - x - h_\alpha)!(m_\alpha q_\alpha + x + h_\alpha)!} p_\alpha^{m_\alpha p_\alpha - x - h_\alpha} q_\alpha^{m_\alpha q_\alpha + x + h_\alpha}$$

ermittelt (vgl. dies. Zbl. 2, 201).

F. Knoll (Wien).

Hagstroem, K.-G.: Contribution formula, integral methods, and risk theory. Skand. Aktuarie Tidsskr. 15, 1–44 (1932).

Nach einer eingehenden Klassifikation und knappen Darstellung der verschiedenen Systeme der Verteilung des Gewinnes und einem Versuch, ein System von „Grundsätzen der Lebensversicherungspolitik“ mit der Absicht aufzustellen, die verschiedenen Verfahren zu werten, wird einerseits die „Contribution Formula“, die in den Vereinigten Staaten besonders häufig angewendet wird, andererseits die „Integralmethode“, deren Ausgestaltung und Verwendung in hohem Maße auf Hagstroem zurückgeht, eingehend untersucht. Die reiche Formelzusammenstellung ist bis ins einzelne durchgearbeitet und kann wegen ihres Umfangs nicht wiedergegeben werden. Numerische Beispiele mit zahlreichen Diagrammen beleuchten alle auftretenden Fragenkomplexe. Für Zwecke der Anwendungen sorgen umfangreiche Tafeln.

F. Knoll (Wien).

Batiele, E.: Probabilité d'une élection à la majorité absolue en un ou deux tours de scrutin. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1141–1142 (1932).

Der Verf. berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine unter den n Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n mit $a_1 + a_2 + \dots + a_n = m$ größer sei als $m/2$, wobei alle möglichen

n -tupel positiven Zahlen als gleich wahrscheinlich angesehen werden. Ref. kann aus der Note nicht ersehen, inwiefern und unter welchen Voraussetzungen der obige Ansatz dem im Titel bezeichneten Probleme entspricht. *Bruno de Finetti (Trieste).*

Mascart, Jean: *Remarques sur les logarithmes.* C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 942 bis 944 (1932).

Elementare Bemerkungen zur Verteilung der Dezimalziffern in Logarithmentafeln. Grenzfragen werden nicht aufgeworfen. *A. Khintchine (Moskau).*

Dasen, E.: *Tables pour le calcul de la vie mathématique d'emprunts dont les amortissements varient en progression arithmétique de raison égale au premier.* Mitt. Ver. einig. schweiz. Versich.-Math. H. **26**, 203—213 (1931).

Mazzoni, Pacifico: *Su una proprietà della vita matematica.* Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 84—87 (1932).

L'A. ritorna su una proprietà della vita matematica, da lui dimostrata la prima volta, e della quale in seguito il prof. Sibirani dette un'altra dimostrazione più semplice. *Autoreferat.*

Aliprandi, G.: *Una proprietà della vita matematica.* Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 17 bis 18 (1932).

L'A. dà una semplice dimostrazione del teorema „la derivata della vita matematica rispetto al tasso è negativa“. *Autoreferat.*

Geometrie.

● **Clebsch, Alfred:** *Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Benutzung der Vorträge. Bearb. u. hrsg. v. Ferdinand Lindemann. Mit d. Vorwort v. Felix Klein z. 1. Aufl. Bd. 1. 1. Tl. Liefg. 3. 2., verm. Aufl.* Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1932. S. XVI, 769—869 u. 58 Fig. RM. 9.—.

Klug, L.: *Desmische Vierecke.* Math. naturwiss. Ber., Ungarn **38**, 1—52 (1932).

I. Reelle desmische Vierecke. Ein Vierecktripel der Ebene heißt (wie im Raume) desmisch, wenn je 2 seiner Vierecke 4fach, und zwar von den Ecken des 3. Vierecks aus perspektiv liegen. Mit der Konfiguration $(16_3, 12_4)$ eines desmischen Tripels ist eine zweite „konjugierte“ verbunden, die zusammen mit der ersten eine Konfiguration $(18_4, 24_3)$ bildet. Beiden Tripeln gemeinsam ist die Figur der 6 einem Kegelschnitt angehörigen „Diagonalgeraden“, von denen jede je 3 der Diagonalepunkte der 3 Vierecke enthält. II. Desmische Kegelschnitte. Den 6 Geraden eines vollständigen Vierecks lassen sich auf 3 Weisen 4 Geraden eines einfachen Vierecks entnehmen. Die einfachen Vierecke von 2 Vierecken eines desmischen Tripels lassen sich auf 3 Weisen so paaren, daß ihre Seiten einem Kegelschnitt angehören. Die so entstehenden 3 Kegelschnitte bilden ein „desmisches Kegelschnitttripel“. Sätze über solche Kegelschnitttripel eines desmischen Vierecktripels. III. Imaginäre desmische Vierecke. Die Figur der 6 (reellen) Vierecke zweier konjugierter Tripel kann durch 9 imaginäre Vierecke so ergänzt werden, daß 10 desmische Vierecktripel entstehen, die zu denselben 6 Diagonalgeraden gehören und aus ihnen folgendermaßen konstruiert werden können: Auf die 10 möglichen Weisen in 2 Tripel aufgeteilt, bestimmen die Diagonalgeraden als Polardreiecke im ganzen 10 Kegelschnitt. Diese lassen sich in 45 Paare zusammenfassen, denen man ebensoviele Vierecke umschreiben kann: Sie sind die einfachen Vierecke der 15 gesuchten vollständigen Vierecke. Ausführliche Untersuchung dieser Konfiguration $(30_6, 60_3)$. *E. A. Weiss (Bonn).*

Klug, L.: *Verallgemeinerung einiger Sätze über Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung.* Math. naturwiss. Ber., Ungarn **38**, 53—79 (1932).

Der Ort der Scheitel der einem zentrischen Kegelschnitt umschriebenen Rechtecke ist ein Kreis (Kreis von de la Hire), den die Faurekreise des Kegelschnittes (die den Polardreiecken des Kegelschnittes umschriebenen Kreise) senkrecht schneiden. Dieser Satz wird auf seinen projektiven Ursprung dadurch zurückgeführt, daß das absolute

Punktpaar durch ein beliebiges Punktpaar, gelegentlich auch durch einen regulären Kegelschnitt ersetzt wird. So ergeben sich Verallgemeinerungen und neue projektive Beweise. In gleicher Weise wird das Analogon im Raume, der Satz von der Monge-kugel einer Fläche 2. Ordnung und den zu ihr senkrechten Faurekugeln behandelt.

E. A. Weiss (Bonn).

Bose, R. C.: Synthetic relations between any three elements of a right-angled triangle on the hyperbolic plane. J. Indian Math. Soc. **19**, 126—129 (1931).

In supply to his former articles the author deduces the relations between three elements of a hyperbolic right-angled triangle in a form free from the use of the formulas of Hyperbolic Trigonometry. He uses two correspondences between the polygons of a hyperbolic plane. One of them, belonging to the author, is the correspondence between two bi-rectangular quadrilaterals, the other, belonging to S. Mukhopadhyaya [Bull. Calcutta Math. Soc. **13** (1922—1923)], is the correspondence between a rectangular pentagon and the right-angled triangle. Founding himself upon these correspondences he deduces two formulas lying the sides of a rectangular pentagon. These formulas represent at the same time the relations between the elements of the corresponding right-angled triangle.

Nil Glagoleff (Moskau).

Sommerville, D. M. Y.: Sets of points self-conjugate with regard to a quadric in n dimensions. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **3**, 6—9 (1932).

Elementare Bemerkungen über die Konstruktion der Polar- m -Ecke einer Hyperfläche zweiter Ordnung in einem n -dimensionalen Raume [s. G. Veronese, Math. Ann. **19**, 161 (1882); C. Segre, Enzykl. d. math. Wiss., III C 7, Note 195 zu S. 832].

E. G. Togliatti (Genova).

Sommerville, D. M. Y.: Metrical coordinates in non-euclidean geometry. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **3**, 16—25 (1932).

Die allgemeinen projektiven Koordinaten werden durch nichteuklidische Längen und Winkel ausgedrückt. Sind z. B. in der elliptischen Ebene p_i ($i = 1, 2, 3$) die elliptischen Abstände eines Punkts P von den Seiten $x_i = 0$ des Fundamentaldreiecks und sind e_i die entsprechenden Zahlen für den Einheitspunkt E , so gilt für die Koordinaten x_i von P bis auf einen Proportionalitätsfaktor: $x_i = \frac{\sin p_i}{\sin e_i}$. Sind a_i die Seiten des Fundamentaldreiecks, so muß der absolute Kegelschnitt die Gleichung haben:

$$x_1^2 \sin^2 e_1 \sin^2 a_1 + \dots + 2x_2 x_3 \sin e_2 \sin e_3 \sin a_2 \sin a_3 \cos a_1 + \dots = 0.$$

Eine Reihe weiterer ähnlicher Formeln wird für die elliptische Ebene und für den elliptischen Raum abgeleitet. Im Raum hängen die Koeffizienten der Gleichung des absoluten Gebildes außer von den Abständen des Einheitspunkts von den Flächen des Grundtetraeders nur noch in einfacher Weise von den Kantenlängen dieses Tetraeders ab, und zwar treten Determinanten folgender Bauart auf, wobei die Zahlen a_{ik} die Kantenlängen des Tetraeders bezeichnen:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a_{23} & \cos a_{24} \\ \cos a_{23} & 1 & \cos a_{34} \\ \cos a_{24} & \cos a_{34} & 1 \end{vmatrix}.$$

Analoge Formeln werden für den n -dimensionalen Fall angegeben. *Cohn-Vossen.*

Sen, R. N.: On rotations in hyperspace. Bull. Calcutta Math. Soc. **23**, 195—209 (1931).

Bei der Cayleyschen Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt des R_n sind die Koeffizienten Funktionen der $\frac{1}{2}n$ ($n-1$) Elemente einer schiefen Determinante ($\lambda_{ik} = -\lambda_{ki}$, $i \neq k$; $\lambda_{kk} = 1$). Der Verf. bestimmt analytisch Ruhepunkte und Ruhemannigfaltigkeiten und findet, daß die normierten Grassmannschen Koordinaten eines punktwise invarianten R_{n-2r} gewissen, der schiefsymmetrischen Determinante ($\lambda_{kk} = 0$) entnommenen Pfaffschen Aggregaten proportional sind. Er leitet schließlich die Drehungsformeln in einer neuen Gestalt ab: Die Richtungskosinus

der Achsen eines ersten rechtwinkligen Koordinatensystems bezogen auf ein zweites gleichartiges werden unter Auszeichnung eines als bekannt vorausgesetzten Ruhe- R_{n-2} als Funktionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Parametern dargestellt. *E. A. Weiss* (Bonn).

Villa, Mario: *Sopra una proprietà caratteristica delle curve piane del terzo e del quarto ordine.* Ist. Lombardo, Rend., II. s. 64, 1258–1270 (1931).

Sei F eine ebene Kurve, O ein Punkt außerhalb von F und a die Polargerade von O bezüglich F . Dann gilt: Die zweite Polare von a bezüglich F (d. i. der Ort der Punkte, deren Polarkegelschnitte bezüglich F die Gerade a berühren) hat im allgemeinen dann und nur dann in O dieselbe Vielfachheit wie die Hessesche Kurve von F , wenn F entweder von dritter oder vierter Ordnung ist. Damit ist eine 1883 von Del Pezzo, der den Sachverhalt in speziellen Fällen feststellte, aufgeworfene Frage beantwortet. Der Satz hat, wie noch gezeigt wird, kein Analogon in Räumen von mehr als zwei Dimensionen. *A. Duschek* (Wien).

Turri, Tullio: *Classificazione dei gruppi proiettivi negli iperspazi.* Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 1, 12–13 (1931).

Turri, Tullio: *Composizione ed ordine del gruppo delle omografie che trasformano in sé una correlazione non degenera.* Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 1, 75–76 (1931).

Turri, Tullio: *Composizione e ordine del gruppo delle omografie che trasformano in sé una correlazione a determinante nullo.* Rend. Semin. Sci. Univ. Cagliari 1, 108 (1931).

Richmond, H. W.: *The tritangent circles of a circular quartic curve.* Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 3, 46–52 (1932).

W. P. Milne hat die Eigenschaften der Kegelschnitte behandelt, welche durch 2 feste Punkte einer ebenen biquadratischen Kurve gehen und diese Kurve in 3 anderen Punkten berühren [J. London Math. Soc. 6, 90 (1931); vgl. dies. Zbl. 1, 350]. Verf. findet eine ziemlich einfache Beziehung für die 64 Kegelschnitte, welche in Übereinstimmung ist mit der Hesseschen Beziehung für die 28 Doppeltangenten einer C_4 . Hierzu wird die ebene biquadratische Kurve betrachtet als die Projektion des Durchschnittes einer quadratischen und einer kubischen Fläche aus einem Punkte, in welchem diese beiden Flächen einander berühren, und nun werden bekannte Resultate, welche für die genannte Kurve 6. Ordnung gefunden sind, angewendet; so die einfache Beziehung für die dreifach berührenden Ebenen der genannten Kurve (Pascal). — Verf. gibt eine Tafel für die Gruppen von 4 dreifach berührenden Kreisen, deren Berührungspunkte auf einer bizirkularen biquadratischen Kurve liegen, und für die Gruppen zweier Doppeltangenten und zweier dreifach berührenden Kreise, deren Berührungspunkte auf einer zirkularen kubischen Kurve liegen.

G. Schaake (Groningen).

Kasner, Edward: *Complex geometry and relativity: Theory of the „Rac“ curvature.* (Dep. of Math., Columbia Univ., New York.) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 267 bis 274 (1932).

Als Rac wird der Grenzwert des Verhältnisses der Sehne zum Bogen einer Kurve bezeichnet, wenn die Endpunkte zusammenrücken. Von eins verschieden kann der Rac nur in Kurvenpunkten mit isotroper Tangente sein. Bei analytischen Raumkurven ist jeder reelle oder komplexe Wert des Rac einschließlich ∞ möglich. Ein anderes Resultat ergibt sich aber, wenn man nur Kurven durch einen festen Punkt einer festen Fläche zuläßt. Ist diese eine nichtisotrope Ebene, so sind nur die Werte $\frac{2}{n+1} \sqrt{n}$ möglich, wo n eine natürliche Zahl ist, die angibt, daß die Kurve mit der isotropen Tangente einen Kontakt $(n-1)$ -ter Ordnung hat. Handelt es sich um einen Punkt mit ungleichen Hauptkrümmungen auf einer reellen Fläche, so kann der Rac alle komplexen Werte mit Ausnahme von $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ annehmen. Andere Möglichkeiten treten bei Nabelpunkten und bei komplexen Flächen auf. Das Problem ist konforminvariant.

Da in der Minkowski-Welt die Isotropen reell sind, besitzt das Problem Interesse für relativistische Bewegungsvorgänge, die zeitweilig, aber nicht dauernd Lichtgeschwindigkeit haben. Eine formale Analogie zur Quantelung der Strahlungsenergie wird angedeutet.

Cohn-Vossen (Köln).

Comessatti, Annibale: Reelle Fragen in der algebraischen Geometrie. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **41**, 107—134 (1932).

This article is a review of the progress made in the theory of real algebraic varieties since the time when Harnack and Klein founded the theory of real algebraic curves. The author is principally concerned with those properties of a real variety which belong to the geometry on the variety, i. e. with its topological properties and with the properties which are invariant under real birational transformations. From this point of view this theory is but a chapter in the general theory of algebraic varieties. The connection with the general theory as well as with the Analysis Situs of algebraic manifolds is clearly brought into evidence by the author. It is the author's great merit of having skillfully adapted the methods of the general theory to the peculiar character possessed by questions of reality and of having greatly contributed by an appropriate use of these methods to the progress of the theory of real algebraic varieties. The article is divided into 4 paragraphs. In the § 1, of introductory character, the fundamental notions of the general theory are sketched. In the § 2 the author's results on the classification of real rational surfaces are expounded. They concern: the discrete infinity of types of such surfaces; the number of moduli of surfaces of a given type; the number of real branches of a rational surface; one-sided and two-sided branches; the relation between the number of real branches and the Zeuthen-Segre invariant I of the surface, which extends the theorem of Harnack; the interesting formula: $j + Z = 2(\bar{\varrho} - 1)$, where Z is the one-dimensional Betti number of the real part of the surface and $\bar{\varrho}$ is the real base number. § 3 is devoted to real Abelian varieties V_p and contains results of the author, Lefschetz and Cherubino. Here, among other things, the author gives the reduction to a canonical form of any symmetry on V_p (involutorial antibirational transformation of V_p into itself), and derive from this the solution of the problem of the number of real classes determined by a non-singular V_p . Also the number of real branches of a real V_p is given. The following two applications are given: the first deals with the known problem of the semi-canonical groups on an algebraic curve, studied and solved by Klein; the second consists in the complete classification of real Kummer varieties and in the determination of their real projective characters. In the last paragraph the author discusses certain as yet unsolved problems of the general theory of real algebraic varieties, especially the extension of the theorem of Harnack. It is interesting that a consideration, which in the case of curves can be used for the proof of this theorem, if extended to surfaces leads to the noteworthy inequality: $Z \leq R_2 + 2(\varrho - \bar{\varrho})$, where Z is the one-dimensional Betti number of the real part of the surface, R_2 is the two-dimensional Betti number of the complex surface and $\bar{\varrho}$ and ϱ are the real and imaginary base numbers respectively.

O. Zariski (Baltimore).

Bompiani, E.: Sul contatto di due superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 116—121 (1932).

Es werden zwei sich in einem Punkte O in erster Ordnung berührende Flächen σ und $\bar{\sigma}$ des projektiven dreidimensionalen Raumes betrachtet. Außer dem allgemeinen Falle werden auch zwei Spezialfälle untersucht: 1. gemeinsame Asymptotentangenten in O ; 2. die beiden Tangenten in O an die Schnittkurve fallen zusammen. Das Hauptergebnis ist eine geometrische Beschreibung eines invarianten Bezugstetraeders. Zu dem Zwecke werden die Ergebnisse der Untersuchungen des Verf. über zwei sich in O berührende oder schneidende Kurven (vgl. dies. Zbl. **3**, 412) herangezogen.

Čech (Brno).

Stouffer, E. B.: A geometrical determination of the canonical quadric of Wilczynski. (*Dep. of Math., Univ. of Kansas, Lawrence.*) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. A. 18, 252—255 (1932).

In der projektivdifferenzialen Flächentheorie hatte Wilczynski eine Fläche zweiter Ordnung Q eingeführt, für die er jedoch eine sehr verwickelte geometrische Erzeugung angibt. Später haben Bompiani und Klobouček auf eine wesentlich einfachere Weise diese Fläche eingeführt (die Identität mit der Wilczynskischen Q hat Lane erkannt). Verf. gibt eine ganz andere bemerkenswerte Erzeugung von Q , indem er sie aus einer vom Ref. eingeführten Geraden ableitet. Čech (Brno).

Wong, B. C.: On surfaces in space of r dimensions. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 77—78 (1932).

Es sei F^n eine Fläche n -ter Ordnung im r -dimensionalen Raume. Die Fläche F^n sei die vollständige Schnittfläche von $q (\leq r-2)$ Mannigfaltigkeiten $V_{k_1}^{n_1}, V_{k_2}^{n_2}, \dots, V_{k_q}^{n_q}$ bzw. von der Ordnung n_1, n_2, \dots, n_q und bzw. von der Dimension k_1, k_2, \dots, k_q , wobei

$$3 \leq k_1, k_2, \dots, k_q \leq r-2,$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_q = r(q-1) + 2$$

sind. Man bezeichne nun die Charakteristiken der Projektion F'^n von F^n auf die lineare Mannigfaltigkeit S_3 mit n (Ordnung), a (Ordnung des Tangentenkegels), j (Anzahl der Zwickpunkte), b (Ordnung der Doppelkurve), t (Anzahl der Tripelpunkte), m (Klasse) und bezeichne ferner die Anzahl der uneigentlichen Doppelpunkte der Projektion von F^n auf die lineare Mannigfaltigkeit S_4 mit d . Diese 7 Zahlen nennen wir die Charakteristiken der F^n . Wenn $q = r-2$ ist, so ist $k_1 = k_2 = \dots = k_{r-2} = r-1$; und F^n ist die vollständige Schnittfläche von $r-2$ Hyperflächen in S_r . Für diesen Fall erhält der Verf. die folgenden Beziehungen zwischen den Charakteristiken

$$n = n_1 n_2 \dots n_{r-2},$$

$$a = n \left(\sum n_i - r + 2 \right),$$

$$b = \frac{1}{2} n \left(n - \sum n_i + r - 3 \right),$$

$$d = \frac{1}{2} n \left[n - \sum n_i n_j + (r-4) \sum n_i - \frac{1}{2} (r-3)(r-4) \right],$$

$$j = n \left[\sum n_i n_j - (r-3) \sum n_i + \frac{1}{2} (r-2)(r-3) \right],$$

usw.

Wenn nun $q \leq r-2$ ist, dann ist eines oder mehrere der k 's kleiner als $r-1$. Für diesen Fall ergibt sich: Bezeichnet man die Schnittfläche der i -ten Mannigfaltigkeit $V_{k_i}^{n_i}$ durch S_{r+2-k_i} mit F^{n_i} und die entsprechenden Charakteristiken von F^{n_i} mit n_i, a_i, b_i, \dots , so ist

$$n = n_1 n_2 \dots n_q,$$

$$a = n \left(\sum n_i - q \right) - 2n \sum b_i/n_i = n \sum a_i/n_i,$$

$$b = \frac{1}{2} n \left(n - \sum n_i + q - 1 \right) + \sum b_i/n_i = \frac{1}{2} n (n-1) - \frac{1}{2} n \sum a_i/n_i,$$

usw.

T. Kubota (Sendai).

Previatti Bortolozzi, Maria: Sulla equazione delle asintotiche di una V_2 col σ_2 a tre dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 14, 487—489 (1931).

This paper belongs to the geometry of Hilbert space, as developed by G. Vitali and his school. A point in this space is a function $f(t)$ with summable square, and a variety of n dimensions, V_n , is defined by $f(t; u_1, u_2, \dots, u_n)$. The σ_v of V_n is the linear vector space composed from the partial derivatives of f as to u up to the v^{th} order inclusive this space is evidently invariant under a change of parameters $u \rightarrow v$. Thus, the σ_2 of a V_2 usually has five dimensions; here it is required to reduce to three dimensions. The Π_v , v^{th} principal normal space, of V_n is the linear vector space contained in σ_v and completely perpendicular to σ_{v-1} ; therefore here Π_2 has one dimension, like the normal to a surface in ordinary space. The object of the paper is to explain in a direct way the fact that the asymptotic lines of the V_2 , although defined with the

help of metric elements like Π_2 , have a purely projective meaning. This is done on the basis of the fact that the reduction of the number of dimensions of σ_2 is evidently a projective phenomenon.

Douglas (Cambridge, U.S.A.).

Alexandroff, Paul: Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen. (*Math. Inst., Univ. Göttingen.*) *Math. Ann.* **106**, 161—238 (1932).

Zusammenfassende Darstellung der vom Verf. herrührenden Theorie der geometrischen Dimensionen; „geometrisch“ deshalb, weil die Theorie aufgebaut wird auf der Topologie der elementargeometrischen Komplexe. — Sei F eine abgeschlossene Teilmenge des Cartesischen R_n . Ein r -dimensionaler Komplex liegt per def. in F , wenn seine Eckpunkte in F liegen. (Verf. betrachtet anstatt der Polyederkomplexe nur deren Eckpunktsysteme; also hat das „in F “ auch sprachlich seinen guten Sinn.) Ein δ -Komplex ist ein solcher, dessen Simplexe Durchmesser $< \delta$ haben. Ein Zyklus $z \bmod m$ ($m = 0, 2, 3, \dots$) heißt $\approx_\varepsilon 0 \bmod m$ in F , wenn im Falle $m \geq 2$ der Zyklus z selbst, im Falle $m = 0$ ein tz (t ganz und $\neq 0$) Rand $\bmod m$ eines ε -Komplexes in F ist. Eine Folge $Z' = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots)$ von r -dimensionalen δ_i -Zyklen $z_i \bmod m_i$ in F mit $\delta_i \rightarrow 0$ heißt ein r -dimensionaler wahrer Zyklus in F („nach variablem Modul“); sind dabei alle m_i Potenzen eines festen $m \geq 2$ bzw. gleich einem festen m ($= 0, 2, 3, \dots$), so heißt Z' ein Potenzzyklus bzw. wahrer Zyklus $\bmod m$. Gibt es für jedes i einen $(r+1)$ -dimensionalen ε_i -Komplex $k_i \bmod m_i$ in F , so daß z_i Rand $\bmod m_i$ von k_i ist und $\varepsilon_i \rightarrow 0$ gilt, so berandet Z' in F . Gibt es eine abgeschlossene Teilmenge F' von F , welche alle Eckpunkte der z_i enthält, so daß für keine Teilfolge $(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_j}, \dots)$ von Z' gilt $z_{i_j} \approx_{\varepsilon_j} 0 \bmod m_{i_j}$ in F' mit $\varepsilon_j \rightarrow 0$, so heißt Z' wesentlich. Ist r die größte Zahl, für welche ein berandender wesentlicher Zyklus Z' nach variablem Modul bzw. $\bmod m$ in F existiert, so heißt $r+1 = \Delta(F)$ bzw. $= \Delta^m(F)$ die geometrische Dimension von F nach variablem Modul bzw. $\bmod m$. Für jede abgeschlossene Menge F ist $\Delta(F)$ gleich der mengentheoretischen Dimension $\dim F$. Für die abgeschlossenen Teilmengen des R_3 stimmen sämtliche Dimensionen $\Delta(F) = \dim F$ und $\Delta^m(F)$ überein (Frankl, Pontrjagin), im R_4 dagegen nicht (Pontrjagin). Offenbar sind $\Delta(F)$ und $\Delta^m(F)$ topologische Invarianten; für jedes F und m ist $\Delta(F) \geq \Delta^m(F)$, und aus $F' \subset F$ folgt $\Delta(F') \leq \Delta(F)$ und $\Delta^m(F') \leq \Delta^m(F)$.

Ist $F = \sum_{j=1}^{\infty} F_j$, wo F und F_j abgeschlossen, so ist $\Delta(F) = \max \Delta(F_j)$ und $\Delta^m(F) = \max \Delta^m(F_j)$.

Geht F_ε bzw. F_{ε_m} aus F durch eine ε - bzw. ε_m -Deformation hervor, so ist für hinreichend kleines ε , ε_m stets $\Delta(F_\varepsilon) \geq \Delta(F)$ bzw. $\Delta^m(F_{\varepsilon_m}) \geq \Delta^m(F)$. — $F \subset R_n$ heißt in einem Punkte $x \in F$ ein r -dimensionales einfaches Hindernis bzw. Hindernis $\bmod m$ ($m = 0, 2, 3, \dots$), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für jedes $\delta > 0$ ein $(n-r-1)$ -dimensionaler Polyederzyklus $z \bmod 0$ bzw. $\bmod m \subset U(x, \delta) - F$, aber hierzu kein $(n-r)$ -dimensionaler Polyederkomplex $k \subset U(x, \varepsilon) - F$ existiert, derart, daß z Rand $\bmod 0$ von k bzw. z selbst im Falle $m \geq 2$, ein tz ($t \neq 0$) im Falle $m = 0$ Rand $\bmod m$ von k ist. Dann gilt der folgende „Rechtfertigungssatz“: Es ist $\Delta(F) = r$ bzw. $\Delta^m(F) = r$ genau dann, wenn F in mindestens einem Punkte ein r -dimensionales und in keinem Punkte ein höherdimensionales einfaches Hindernis bzw. Hindernis $\bmod m$ bildet. — Verf. bezeichnet eine abgeschlossene Menge F mit $\Delta(F) = r$ als zyklisch, wenn es einen Potenzzyklus $Z' = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots)$ in F gibt, so daß nicht jedes z_i Rand $\bmod m_i$ eines ε_i -Komplexes in F mit $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ist. Eine stetige Abbildung φ von F auf die r -dimensionale Sphäre S^r heißt wesentlich, wenn man durch stetige Abänderung von φ keinen Punkt aus S^r von $\varphi(F)$ befreien kann. Dann gilt der Satz: Die abgeschlossene Menge F mit $\Delta(F) = r$ ist genau dann zyklisch, wenn sie auf S^r wesentlich abgebildet werden kann. *Nöbeling*.

Borsuk, Karol: Über Schnitte der n -dimensionalen Euklidischen Räume. *Math. Ann.* **106**, 239—248 (1932).

Verf. betrachtet den aus allen stetigen Abbildungen eines gegebenen Raumes R auf die n -dimensionale Sphäre S^n bestehenden Raum — wir bezeichnen ihn durch

(R, S^n) — und gelangt zu folgendem Resultat: Eine beschränkte abgeschlossene Menge $F \subset R^n$ zerlegt den R^n dann und nur dann, wenn der Raum (F, S^{n-1}) nicht zusammenhängend ist. Nennt man eine stetige Abbildung f_0 von F auf die S^{n-1} wesentlich, falls bei jeder stetigen Abbildung f_1 , welche aus f_0 durch stetige Abänderung entsteht, die ganze S^{n-1} als Bildmenge auftritt, so läßt sich das Theorem des Verf. auf folgende Form bringen: Die Menge F zerlegt den R^n dann und nur dann, wenn man sie wesentlich auf die S^{n-1} abbilden kann. In dieser Form (und unter der Voraussetzung $\dim F = n - 1$) bildet der Satz einen Spezialfall eines allgemeinen Verschlingungssatzes von Alexandroff („Dimensionstheorie“, Nr. 81, 5. Hauptsatz; vgl. vorst. Referat), aus dem er sich (nach eigener Angabe des Verf.) auch ohne die Voraussetzung $\dim F = n - 1$ leicht herleiten läßt. Die im wesentlichen rein mengentheoretische Beweismethode des Verf. ist übrigens von den Methoden der erwähnten Arbeit des Ref. gänzlich verschieden. Bei seinem Beweise stützt sich der Verf. auf folgenden, von ihm in derselben Arbeit hergeleiteten, auch an und für sich wichtigen Satz: Dann und nur dann zerlegt $F \subset R^n$ den R^n nicht, wenn jede stetige Abbildung f von F auf die S^{n-1} zu einer stetigen Abbildung des ganzen R^n auf die S^{n-1} erweitert werden kann.

P. Alexandroff (Moskau).

Kaufmann, Boris: Über die Struktur der Komplexe erster Ordnung in der Theorie der Primenden. Math. Ann. 106, 308—333 (1932).

A continuation of the author's studies of the relations between plane and space domains and their boundaries begun in an earlier paper [Math. Ann. 103, 70—144 (1930)]. The terminology of the previous article is extensively employed and must be mastered before the present paper can be read. Let G be a plane or space domain with boundary B . A sequence of points (p_n) of G converging to B is called a boundary sequences (Grenzpunktfolge). If (p_n) converges to a point x of B and (1) if every neighborhood of x determines a subdomain H of G in which the sequence (p_n) is essentially contained, then (p_n) is called an α -sequence, (2) if (p_n) contains no α -subsequence, then it is called a β -sequence. A sequence is well defined if it satisfies either (1) or (2). If M_f is a collection of well defined sequences from G and R_1, R_2, \dots is a well defined sequence from G converging to x and not belonging to M_f , then this sequence is called a nonpartitioned boundary sequence (unbewallte Grenzpunktfolge) of the collection M_f in case for every v there exists, for almost every point R_n , a sequence of M_f which can be joined to R_n by a broken line system which is essentially contained in an arbitrarily small neighborhood $U_v(x)$ of x . Two well defined sequences which can be joined by a particular type of broken line system are said to be conjugate, and the totality Δ of all sequences from G which are conjugate to a given α - or β -sequence is called a conjugate f -set. The following structure theorem is considered: At least one subsequence (p_n^*) of every boundary sequence (p_n) is contained in some conjugate f -set Δ which either contains every subsequence of (p_n^*) or else satisfies the condition $L(\Delta) \neq 0$, where $L(\Delta)$ is the non-partitioned f -boundary set of Δ and $L_\alpha(\Delta)$ and $L_\beta(\Delta)$ are the parts of $L(\Delta)$ consisting of α - and of β -sequences respectively. A still stronger theorem is proved, to the effect that the f -set Δ can be so found for some subsequence (p_n^*) that either Δ is cyclic or else satisfies the condition $L_\alpha(\Delta) \neq 0$, where „ Δ is cyclic“ means that all subsequences of any sequence of Δ are conjugate to each other and are contained in Δ . This stronger structure theorem is applied to show that at least one subsequence of every boundary sequence must lie on a fundamental curve of G , where a curve C of G is called a fundamental curve provided it converges to B and its limit set on B contains at most one accessible point.

G. T. Whyburn (Baltimore).

Kaufmann, Boris: Über die Bestimmung der Primenden durch reguläre Komplexe. Math. Ann. 106, 334—342 (1932).

In connection with his investigations on plane and space domains and their boundaries [see Math. Ann. 103, 70—144 (1930); see also the preceding review], the author

has defined regular sequences of points. The totality of regular sequences in a domain G may be used to define a system of complexes, called regular complexes. The system of regular complexes determines a system of boundary elements, and the question naturally arises as to the identity of these boundary elements with the prime ends (the latter are known to be determined by means of the complete system of all complexes). The author establishes this identity by showing that the system of all regular complexes and the system of all complexes originally employed are equivalent.

G. T. Whyburn (Baltimore).

Čech, Eduard: Sur les ensembles connexes irréductibles entre n points. Čas. mat. fys. 61, 109—128 u. franz. Zusammenfassung 128—129 (1932) [Tschechisch].

In I werden Fundamentalbegriffe der mengentheoretischen Topologie kurz zusammengefaßt. II enthält eine Untersuchung des Verf. über den Begriff des zwischen n Punkten irreduzibel zusammenhängenden Raumes. Für eine gewisse beschränkte Klasse topologischer Räume werden die Begriffe von Endpunkten und von singulären (den Raum nicht zerlegenden) Punkten eingeführt und diskutiert. Spezialergebnis: der Raum ist zwischen seinen endlich vielen singulären Punkten irreduzibel zusammenhängend. Die Einschränkungen sind solcher Natur, daß sie im Falle kompakter Räume nur für eindimensionale Baumkomplexe erfüllt werden.

Róžańska (Moskau).

Lefschetz, Solomon: On certain properties of separable spaces. (Dep. of Math., Univ., Princeton.) Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 202—203 (1932).

Anschließend an E. H. Moore und Chittenden nennt der Verf. ein normal development eines separablen metrischen Raumes R eine Folge endlicher Überdeckungen $\{\Sigma_k\} = \{\{U^{k,\alpha}\}\}$ mittels offener Mengen $U^{k,\alpha}$, wenn diese Folge die Eigenschaften hat: a) die $U^{k,\alpha}$ bilden ein volles Umgebungssystem von R ; b) jedes $\bar{U}^{k+1,\alpha}$ ist in einem $U^{k,\beta}$ enthalten; c) ist $U^{k,\alpha} \subset U^{i,\beta}$, so ist bei hinreichend großem k jedes $\bar{U}^{h,\gamma}$ in $U^{i,\beta}$ enthalten, falls es mit $\bar{U}^{k,\alpha}$ gemeinsame Punkte hat. Als fundamentales Resultat seiner Arbeit betrachtet Verf. den Satz von der Existenz der normal developments in jedem separablen metrischen Raum. Verf. deutet den Beweis des Satzes nur kurz an und verweist wegen eines ausführlichen Beweises auf eine noch erscheinende Arbeit. Hierzu ist allerdings zu bemerken, daß man diesen Satz sehr leicht beweisen kann: man betrachte eine dem Raum R homöomorphe Menge M des Fundamentalquaders H des Hilbertschen Raumes und wähle eine Folge $S_1, S_2, \dots, S_k \dots$ von endlichen Überdeckungen von H , von der Eigenschaft, daß die abgeschlossene Hülle eines jeden Elements $V^{k+1,\alpha}$ von S_{k+1} in einem Element $V^{k,\beta}$ von S_k enthalten ist und die Durchmesser der $V^{k+1,\alpha}$ kleiner als die Hälfte der kleinsten Zahl sind, die als Durchmesser eines Elementes von S_k auftritt. Die $S_k = \{V^{k,\alpha}\}$ bilden offenbar ein normal development von H , die $S'_k = \{M \cdot V^{k,\alpha}\}$ ein normal development von M , welches durch die zwischen M und R bestehende Homöomorphie in ein normal development von R übergeht. Die weiteren Resultate der Note bestehen aus der Übertragung des dimensionstheoretischen „Pflastersatzes“ für den Fall nicht kompakter separabler Räume und der Wiedergabe des bekannten Einbettungssatzes von Hurewicz; beides ist also nicht neu [vgl. z. B. Menger, Dimensionstheorie. Teubner 1928, 155ff. sowie 280, u. Hurewicz, Mh. Math. Phys. 37, 199—208].

P. Alexandroff.

Whitney, Hassler: Regular families of curves. I. (Dep. of Math., Univ., Princeton.) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 275—278 (1932).

Versuch, den Begriff der Trajektorien einer Kurvenschar allgemein zu fassen: Sei F eine Familie von Kurven C (topologischen Streckenbildern) in einem metrischen (total beschränkten) Raum. Es sei p ein Punkt einer C und $\varepsilon > 0$. Eine abgeschlossene, p enthaltende Menge $S \subset U(p, \varepsilon)$ heißt Trajektorie (cross-section) durch p , wenn jede Kurve C' durch einen Punkt $p' \in U(p, \delta)$ genau einen Punkt mit S gemein hat und jeder Punkt von S auf einem solchen Bogen liegt. Unter schwachen Voraussetzungen über F existiert zu jedem p ein S .

Nöbeling (Wien).

Durand, Georges: Sur l'application de la notion de contingent à la recherche de caractères de planéité pour un arc simple. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 944 bis 946 (1932).

Nach Bouligand nennt man die Gesamtheit der Halbtangenten einer Menge \mathcal{C} in deren Häufungspunkt M die Kontingens von \mathcal{C} in M (vgl. auch dies. Zbl. 1, 328). Es gilt nun folgender Satz für einfache Kurvenbogen: Enthält die Kontingens in jedem Kurvenpunkte M eine Halbgerade, die parallel ist zu einer Ebene Π und immer auf derselben Seite einer durch M gehenden Parallelebene zu einer festen Ebene Π' liegt, so ist der Bogen eben. Der Satz erledigt eine von Bouligand gestellte Frage (vgl. dies. Zbl. 3, 25).

W. Feller (Kiel).

Barba, Guido: Sulla definizione di lunghezza di una curva. Note Esercit. Mat. 6, 16—18 (1931).

Verf. beweist, daß die Länge $\varphi(C)$ eines Bogens eindeutig durch die folgenden Bedingungen bestimmt ist: 1. wenn C ein Polygon ist, so ist $\varphi(C)$ dessen Länge im elementargeometrischen Sinne; 2. $\varphi(C_1) = \varphi(C_2)$, wenn C_1 und C_2 kongruent sind; 3. wenn C durch einen Punkt in zwei Teilbogen C_1 und C_2 zerlegt ist, so ist $C = C_1 + C_2$; 4. $\varphi(C)$ ist halbstetig von unten (vgl. Fréchet, Fundam. Math. 7, 210—224). Es würde übrigens genügen, 1. nur für die Einheitsstrecke zu fordern. Verf. stellt auch die Frage, ob man mit analogen Bedingungen den Flächeninhalt eindeutig bestimmen könnte, präzisiert aber diese Fragestellung nicht weiter.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Mechanik der elastisch und plastisch verformbaren Körper.

Weissenberg, Karl: Die Mechanik deformierbarer Körper. Abh. preuß. Akad. Wiss. Nr 2, 1—61 (1931).

Der Verf. versucht die mannigfaltigen deformationsmechanischen Eigenschaften fester und flüssiger Körper zu klassifizieren. Die Deformationsmechanik wird eingeteilt in Dilatationsmechanik und reine Deformationsmechanik. Der Verf. beschäftigt sich in der vorliegenden Arbeit lediglich mit der letzteren und beschränkt sich überdies noch auf solche Deformationen, „bei welchen die Hauptachsen des Deformationstensors parallel zu sich selbst bleiben, also keine Rotationen auftreten“ („einfache Deformationen“). Der Verf. scheint zu glauben, daß aus dieser „einfachen Deformationsmechanik“ und der „Rotationsmechanik“ die Mechanik beliebiger volumtreuer Deformationen aufgebaut werden könne; es sei jedoch darauf hingewiesen, daß dies keineswegs der Fall ist. — Ausgehend von den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik wird eine deformationsmechanische Zustandsgleichung aufgestellt, welche die isothermen, nur von mechanischen Veränderlichen abhängigen Deformationen beherrscht. Die Zustandsgleichungen verschiedener Körper unterscheiden sich lediglich durch die Art, in welcher die freie und die gebundene Energie von den mechanischen Veränderlichen (Spannungstensor P , Formänderungstensor S und deren μ -ten und ν -ten zeitlichen Differentialquotienten $P^{(\mu)}$, $S^{(\nu)}$) abhängen. Es ergeben sich drei Klassen von Körpern, je nachdem die Energien von den $P^{(\mu)}$ und $S^{(\nu)}$ oder nur von den $P^{(\mu)}$ oder nur von den $S^{(\nu)}$ abhängen. Werden die Energien als Polynome in den $P^{(\mu)}$ und $S^{(\nu)}$ vorausgesetzt, so können die genannten Klassen noch unterteilt werden nach dem Grad dieser Polynome und der Ordnung der darin auftretenden Differentialquotienten. Je nachdem die gebundene oder die freie Energie identisch verschwindet, ergibt sich rein elastisches oder rein plastisches Verhalten. Das Verhalten eines beliebigen Körpers kann eindeutig in diese beiden Komponenten zerlegt werden. Diese allgemeinen Gesichtspunkte der vom Verf. vorgeschlagenen Einteilung sind auch dann brauchbar, wenn man die oben erwähnte starke Beschränkung der betrachteten Deformationen fallen läßt, dagegen setzen die meisten speziellen Ausführungen der Arbeit diese Beschränkung wesentlich voraus.

Prager (Göttingen).

Signorini, A.: Alcune proprietà di media nella elastostatica ordinaria. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 151—156 (1932).

Es wird bewiesen, daß die Mittelwerte der Spannungskomponenten in einem beliebigen im Gleichgewicht befindlichen Kontinuum gleich sind den durch das Gesamtvolumen dividierten astatischen Koordinaten des auf das Kontinuum wirkenden Systems von Massen- und Oberflächenkräften. Ausgehend von diesem Satze werden Beziehungen für die mittleren Formänderungskomponenten eines elastischen Kontinuums bei isothermer und adiabatischer Zustandsänderung abgeleitet. *Prager.*

Conforto, F.: Considerazioni sugli impulsi nei corpi elastici isotropi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 130—135 (1932).

In dieser Note werden Differentialgleichungen hergeleitet, denen die Differenzen der Geschwindigkeitskomponenten nach und vor dem Stoße genügen. Zunächst wird darauf hingewiesen, daß es nicht möglich ist, von den fertigen Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie auszugehen. Der tiefere Grund wird darin erkannt, daß nach der Charakteristiken-Theorie diesen Differentialgleichungen eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Unstetigkeiten der Geschwindigkeiten entspricht. Um aber trotzdem im Sinne einer Näherungstheorie zu den gewünschten Differentialgleichungen zu gelangen, wendet der Verf. die Grundgesetze der Mechanik auf einen beliebigen Raumteil an. Die folgenden Überlegungen sind dann analog denen, die man gewöhnlich anstellt, um von da aus zu den Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie zu gelangen. *Funk (Prag).*

Sezawa, Katsutada: Notes on the waves in visco-elastic solid bodies. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 10, 19—21 (1932).

● **Coker, E. G., and L. N. G. Filon: A treatise on photoelasticity.** Cambridge: Univ. press 1931. XVIII, 720 S. 50/-.

Das vorliegende Werk enthält eine erschöpfende Darstellung der theoretischen Grundlagen und bisherigen Anwendungen der spannungsoptischen Methode zur Untersuchung ebener Spannungszustände in elastischen Körpern. Die drei ersten Kapitel behandeln in großer Ausführlichkeit die optischen und elastizitätstheoretischen Grundlagen der Methode. Die optischen Ausführungen erfolgen vom Standpunkt der klassischen elektromagnetischen Lichttheorie aus, die elastizitätstheoretischen Betrachtungen sind weitgehend den speziellen Erfordernissen der spannungsoptischen Methode angepaßt. Die restlichen vier Kapitel bringen eine Fülle technischer Anwendungen. Die benutzten Belastungsgeräte sind eingehend beschrieben, und den spannungsoptischen Ergebnissen ist nach Möglichkeit die elastizitätstheoretische Durchrechnung des Problems oder eines verwandten einfacheren gegenübergestellt. Mehrere farbige Abbildungen vermitteln eine Vorstellung von spannungsoptischen Aufnahmen für diejenigen Leser, welche solche Aufnahmen nicht aus eigener Anschauung kennen. Angesichts der raschen Entwicklung und großen Verbreitung, welche die spannungsoptische Methode in den letzten Jahren erfahren hat, ist das vorliegende umfassende Werk ganz besonders zu begrüßen. *Prager (Göttingen).*

Favre, Henry: La détermination optique des tensions intérieures. Rev. Optique 11, 1—21 (1932).

Grauers, Hugo: Kipperscheinungen. Ark. Mat. Astron. Fys. 22 A, Nr 22, 1—31 (1932).

Als Ziel der Arbeit wird eine Erweiterung der von L. Prandtl (München: Diss. 1899) gegebenen Theorie des Kippens gerader Träger bezeichnet. Verf. entwickelt zunächst die Differentialgleichungen für die Schwingungen des Balkens. Dabei hat man zu beachten, daß die von den Lasten erzeugten statischen Durchbiegungen von anderer Größenordnung sind als die zusätzlich bei den Schwingungen entstehenden Formänderungen. Die Produkte aus beiden können nicht vernachlässigt werden, und die Gleichungen, die deshalb nicht linear sind, ergeben eine gekoppelte Transversal- und

Torsionsschwingung. Das Nullwerden ihrer Frequenz ist die Bedingung für den Eintritt des Kippens. Die Differentialgleichungen der dabei auftretenden Formänderung gehen aus denen der Schwingung durch Fortlassen aller Beschleunigungsglieder hervor. Diese Gleichungen sind in aller Strenge aufgestellt. Insbesondere ist nirgends die einschränkende Annahme gemacht, daß die eine Biegungssteifigkeit groß sei gegen die andere und gegen die Verdrehungssteifigkeit. Dadurch werden die Gleichungen sehr umfangreich und die Ausrechnung mühsam. Zur Lösung dient ein Potenzreihenansatz. Durch Rekursion können die Koeffizienten alle durch die der ersten Glieder ausgedrückt werden, und für diese wird aus den Randbedingungen ein System homogener, linearer Gleichungen gewonnen, dessen Determinante durch Nullsetzen in üblicher Weise den kritischen Wert der Belastung liefert. Die Ergebnisse werden für verschiedene Lagerung des Trägers zahlenmäßig ausgewertet und mit den Ergebnissen von Prandtl verglichen. Dabei werden durchgängig große Abweichungen gefunden. Diese haben nicht, wie behauptet wird, ihre Ursache in unzulässigen Vernachlässigungen bei Prandtl, sondern rühren daher, daß der Verf. die Konvergenz seiner Reihen erheblich überschätzt und sich mit zu wenig Gliedern begnügt. Man kann seine Ergebnisse auch aus den von Prandtl angegebenen Formeln erhalten, wenn man alle dort benutzten Potenzreihen hinter dem zweiten Glied abbricht, was nach dem Erfolg offenbar unzulässig ist. Für den einfachen Kragträger erhält man allerdings auch dann noch $\sqrt{12} = 3,46$ statt genauer 4,01, und nicht $\sqrt{6}$, wie Verf. angibt. *W. Flügge.*

Grauers, Hugo: Knickung gerader Stäbe bei Stößen. Ark. Mat. Astron. Fys. 22 A, Nr 26, 1—19 (1932).

Wenn eine Last Q gegen das obere Ende eines geraden, lotrechten Stabes stößt, so erzeugt sie in ihm Längsschwingungen, die sich in bekannter Weise berechnen lassen. Die Frequenzen ergeben sich als Lösungen einer transzendenten Gleichung. Wenn das Gewicht des Stabes klein ist gegen Q , so kann man die niedrigste Frequenz angenähert als Quadratwurzel berechnen und erhält dann für die axialen Verschiebungen $w(z, t)$ der Grundschiwingung eine sehr einfache Formel (z = Koordinate in Richtung der Stabachse, t = Zeit). Der Stab kann außerdem Biegungsschwingungen ausführen. Wenn man ihre Differentialgleichung aufstellt, muß man beachten, daß die Längskraft von anderer Größenordnung ist als die bei der Biegung auftretenden Spannungen, so daß ihre Produkte mit Verschiebungen in der Differentialgleichung erscheinen. Sie heißt mit den üblichen Bezeichnungen

$$EJ u^{IV} - EF(w' u')' + \rho F u'' + \rho J u'''' = 0.$$

Darin bezeichnet u die Durchbiegung, Striche Ableitungen nach z , Punkte nach t . Im zweiten Glied kann man w' aus der vorher berechneten Längsschiwingung einführen und kommt so auf eine partielle Differentialgleichung, in der ein Koeffizient eine periodische Funktion von t ist. Für die Zeit $t = t_1$, zu der er ein Maximum erreicht, kann man ihn angenähert konstant setzen und dann die Biegelinie durch Kreis- und Hyperbelfunktionen darstellen. Die Randbedingungen liefern ein homogenes Gleichungssystem, dessen Koeffizienten aus den gegebenen Größen kompliziert aufgebaut sind. Das Verschwinden der Determinante in Verbindung mit der Forderung, daß die Differentialgleichung eine in t periodische Lösung haben soll, gibt die Bedingung für die Stabilität, die leider nur unter sehr einschränkenden Annahmen ausgewertet wird.

W. Flügge (Göttingen).

Kármán, Theodor von, Ernest E. Sechler and L. H. Donnell: The strength of thin plates in compression. Trans. Amer. Soc. Mech. Engr., appl. Mech. 54, 53—57 (1932).

Versuche, die das Bureau of Standards in Zusammenarbeit mit dem Bureau of Aeronautics, Navy Departement, ausgeführt hat, zeigen, daß die kritische Belastung einer frei gestützten, in ihrer Ebene auf Druck beanspruchten Rechteckplatte wesentlich nur von Plattenmaterial und Plattendicke, nicht aber vom Seitenverhältnis abhängig ist. Die Verff. geben eine theoretische Begründung dieser Erscheinung.

E. Weinel (Göttingen).

Ghosh, J.: Vibrations of a circular plate of variable thickness. *Indian Phys.-Math. J.* 3, 61—64 (1932).

The equation of motion for transverse vibrations of a plate leads to the differential equation $(\nabla^4 - k^4)w = 0$ where the transverse displacement is equal to $w \cos(pt + \epsilon)$ and $k^4 = 3\rho(1 - \sigma^2)p^2/Eh^2$, $2h$ being the constant thickness. It does not appear that this differential equation, derived for a plate of constant thickness and therefore having a constant flexural rigidity, can be correctly used for a plate of variable thickness and consequently variable flexural rigidity. The paper contains no indication that this point has been investigated. It is assumed that $h = \alpha r^2$, α being a small constant, with the result that k^4 takes the form m^4/r^4 . The differential equation can then be integrated for an incomplete circular plate bounded by the circles $r = a$ and $r = b$, both edges of the plate being clamped. If w is assumed to be a linear combination of terms of the form $w_n(r) \cos(n\theta + \gamma)$, w_n satisfies an ordinary differential equation of the fourth order whose solution is a linear combination of terms $r^{\pm\beta}$, $r^{\pm\delta}$ where $\beta^2 = n^2 - m^2$, $\delta^2 = n^2 + m^2$. Substitution in the boundary conditions leads to a transcendental relation between β und δ and hence to an equation in m which determines p and consequently the frequencies of the normal modes of vibration. H. W. March.

Flügge, Wilhelm: Die erzwungenen Schwingungen der Kreisplatten. *Z. techn. Physik* 13, 199—204 (1932).

Nach älteren Beobachtungen von A. Elsas [*Ann. Physik* 19, 474 (1883)] kann eine kreisförmige elastische Platte, deren Mittelpunkt durch einen Faden von einer Stimmgabel aus erregt wird, erzwungene Schwingungen mit jeder Frequenz ausführen, wobei die erhaltenen Klangfiguren stetig ineinander übergehen und für die Eigenschwingungen die Chladni-Figuren ergeben. Die rechnerische Erklärung dieser Versuche ist bisher nicht möglich gewesen. Die bei den erzwungenen Schwingungen entstehenden Klangfiguren können gedeutet werden, wenn die Wirkung des Fadens auf die Platte nicht als eine Einzelkraft, sondern als eine Folge von Singularitäten angenommen wird, deren jede wieder aus einer alternierenden Folge von $2m$ Kräften $+P$ und $-P$ besteht, die über den Umfang eines kleinen Kreises vom Halbmesser b in gleichen Abständen verteilt sind. Die durch diese Lasten entstehenden Durchbiegungen werden berechnet und der Grenzübergang $b \rightarrow 0$, $Pb^m \rightarrow S_{2m}$ (endlich) ausgeführt. Die einfachste dieser Singularitäten ergibt sich für $m = 1$ und ist im wesentlichen ein im Mittelpunkte konzentriertes Moment (Dipol). — Sodann werden die erzwungenen Schwingungen ausgerechnet, wenn die Kräfte $S_{2m} \cos \omega t$ im Mittelpunkte angreifen. Durch Überlagerung von diesen und drehsymmetrischen Schwingungsformen werden die bei den obengenannten Versuchen beobachteten Figuren erhalten. Th. Pöschl (Karlsruhe).

Grammel, R.: Die erzwungenen DrehSchwingungen von Kurbelwellen. *Ing.-Arch.* 3, 76—88 (1932).

Der Aufsatz schließt an eine frühere Mitteilung [*Ing.-Arch.* 2, 228 (1931); vgl. dies. Zbl. 1, 362] an. Es wird das dort beschriebene Verfahren auf die erzwungenen DrehSchwingungen von Kurbelwellen angewendet; Ziel ist vor allem die Ermittlung der Drillungsmomente in den Wellenstücken. — Die Bezeichnungen der ersten Mitteilung werden übernommen. — Die auf die $(n + 1)$ Drehmassen θ_k wirkenden Zwangsmomente

$$M_k = a_k \cos 2\pi \alpha t + b_k \sin 2\pi \alpha t \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

werden als bekannt vorausgesetzt. Die entsprechend gebildeten Komponenten der unbekannten Drillungsausschläge ϑ_k heißen u_k und v_k , die der Drillungsmomente M_k sind x_k und y_k . u_k, v_k, x_k, y_k sind die $2(2n + 1)$ Unbekannten des Problems. Zu ihrer Bestimmung hat man jeweils die $n + 1$ dynamischen Grundgleichungen der Drehmassen und n elastische Grundgleichungen der Drillung. Man erhält so für cos- und sin-Glieder ein Gleichungssystem von $(2n + 1)$ Gleichungen für ebenso viele Unbekannte. In diesem System lassen sich die Ausschläge entfernen, so daß ein System von n linearen

Gleichungen für die n unbekannten Komponenten der Drillungsmomente übrigbleibt. — Die direkte Auflösung dieses Gleichungssystems wird umgangen durch Zurückführung der Funktionen x_0, x_1, \dots, x_{n-1} auf die schon tabellierten Frequenzfunktionen φ_k und neue aus ihnen nach dem Schema

$\Phi_k = (a_0 - a_1) \varphi_{k-1} - (a_1 - a_2) \varphi_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} (a_{k-1} - a_k) \varphi_0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$
gebildete „Zwangsfunktionen“ Φ_k . Die Lösungen haben die Form

$$x_k = (-1)^k \left[\Phi_k - \frac{\varphi_k}{\varphi_n} \Phi_n \right].$$

Die Rechnung wird für die „homogene Maschine“ und die homogene Maschine mit einer und zwei Zusatzmassen durchgeführt. — Schließlich werden noch die „Scheinresonanzen“ mit den entwickelten Hilfsmitteln behandelt. *K. Klotter* (Karlsruhe).

Soderberg, C. Richard: On the subcritical speeds of the rotating shaft. Trans. Amer. Soc. Mech. Engr., appl. Mech. **54**, 45–52 (1932).

Der Verf. untersucht die kritischen Drehzahlen zweiter Art einer Scheibe mit masseloser Welle, die horizontal und frei gelagert ist. Um die Wirkungen der einzelnen Einflüsse auf die Auslenkung der Welle miteinander vergleichen zu können, wird für die eigentliche kritische Drehzahl (n_c) und für die durch Exzentrizität der Scheibe und durch Unsymmetrie des Wellenquerschnitts hervorgerufenen kritischen Drehzahlen zweiter Art ($n = \frac{n_c}{2}$) das zeitliche Anwachsen der Auslenkungen untersucht. Es ergibt sich, daß bei den praktisch vorkommenden Abmessungen und Herstellungsfehlern der Einfluß der Scheibenexzentrizität gegen die Unsymmetrie im Biegungsquerschnitt fast ganz zurücktritt. *Zieher* (Jena).

Got, Th.: Contribution à l'étude des vitesses critiques de flexion des arbres tournants. J. Éc. polytechn., II. s. **29**, 7–53 (1931).

Bei der Berechnung der kritischen Drehzahlen rasch umlaufender Wellen wird oft eine von Dunkerley empirisch gefundene Formel verwendet. Es werden einige Arbeiten, in denen eine theoretische Begründung der Dunkerleyschen Formel versucht wird, kritisch referiert. In einigen exakt durchgerechneten Fällen (an beiden Enden gelagerte Welle mit einer Einzelscheibe, Berücksichtigung von Wellenmasse und von Kreiselkräften) liefert die ursprüngliche Dunkerleysche Formel bessere Näherungen als eine von Hahn gegebene Modifikation derselben. *K. Hohenemser* (Göttingen).

Brunelli, P. E.: Intorno ad alcuni valori singolari delle velocità critiche degli alberi. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 43–46 (1932).

Verf. kritisiert eine Arbeit von Th. Got [C. R. Acad. Sci., Paris **193**, 706–708 (1931); vgl. dies. Zbl. **3**, 31], welcher die kritischen Drehzahlen einer rotierenden, an beiden Seiten in drehbaren Lagern gestützten, nicht masselosen Welle behandelt, die in der Mitte eine sehr dünne zentrische Scheibe trägt: Trennt man nämlich die Fälle, wo nur die Zentrifugalkraft und wo nur ein Moment wirkt, so sind nach den dabei sich ergebenden transzendenten Gleichungen die kritischen Drehzahlen abhängig von dem Gewichtsverhältnis bzw. dem Trägheitsradius der Scheibe, der sehr weit variieren kann. Die bei Got genannte Isolierung der tiefsten kritischen Drehzahl braucht danach nicht notwendig aufzutreten, auch die „Häufung“ der kritischen Drehzahlen ω_n kann demgemäß bei hohem oder niedrigem n auftreten. — Setzt man für die Biegelinie ein Polynom dritten Grades unter Vernachlässigung der Eigenmasse, so lassen die Annäherungsausdrücke hieraus für die tiefste kritische Drehzahl den genannten Einwand auch schon erkennen. *W. Meyer zur Capellen* (Koblenz-Mosel).

Kuba, Franz: Die zentrische Kurbelschwinge. S.-B. Akad. Wiss. Wien **140**, 729 bis 737 (1931).

Eine zentrische Kurbelschwinge ist der Sonderfall der Schwingkurbel, bei welcher die Koppel in den Totlagen in der gleichen Durchmessergeraden des Kurbelkreises liegt. Sei d der feste Steg, a die Kurbel, b die Koppel und c die Schwinge, so ist die

Bedingung für eine solche Schwinge: $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$. Es werden einige (zum Teil sehr primitive) Konstruktionen angegeben, wenn bei gegebenem a , d und b oder c die fehlende Größe bestimmt werden soll. — Sind $3'$ und $3''$ die Umkehr- oder Knotenpunkte der Schwinge und sind $2'$ und $2''$ die entsprechenden Punkte des Kurbelkreises (auf derselben Geraden $2' 2'' 3' 3''$), so ist der hier analytisch bestimmte Ort für diese Punkte je ein Spezialfall der Kreiskonchoide, eine Pascalsche Schnecke: Der Mittelpunkt des Kurbelkreises ist der „Pol“ und der Kreis vom Halbmesser d der erzeugende Kreis. Die äußere Kurve ist nur bis zu einem bestimmten Punkt gültig, welcher Grenzfall das gleichschenklige, durchschlagende Gelenkviereck liefert.

Ref. bemerkt, daß die geometrischen Konstruktionen schon ohne weiteres den geometrischen Ort liefern. Außerdem ist dieser Sonderfall der Kreiskonchoide, bewegungsgeometrisch betrachtet (eine Gerade wird so geführt, daß ein Punkt auf ihr auf einem Kreise bewegt wird, während die Gerade durch einen auf letzterem gelegenen Punkt gleitet), ja nichts anderes als die Umkehr der kardanischen Bewegung, bei der dieser Kreis (vom Halbmesser d) der feste Kreis ist.

W. Meyer zur Capellen (Koblenz-Mosel).

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper.

Dryden, Hugh L., Francis D. Murnaghan and H. Bateman: Report of the committee on hydrodynamics, division of physical sciences, national research council. Bull. Nat. Res. Council. Nr 84, 1—634 (1932).

Ein enzyklopädischer Bericht über die bis zum Jahre 1931 erzielten Ergebnisse hydrodynamischer Forschung. Im Teil I: Die Physik der Flüssigkeiten und die klassische Hydrodynamik, gibt Dryden im 1. Kap. einen Überblick über die experimentelle Forschung und diskutiert die Möglichkeiten der theoretischen Behandlung der angeschnittenen Probleme unter Vernachlässigung gewisser Eigenschaften der Flüssigkeit. Murnaghan entwickelt im 2. Kap. die Grundlagen der klassischen Hydrodynamik — unter anderem ist hier die Strömung um den Tragflügel ziemlich ausführlich behandelt, der Propeller dagegen kaum erwähnt. Bateman kennzeichnet im 3. Kap. die physikalischen Eigenschaften der zähen Flüssigkeit. Im Hauptteil II behandelt B. die Bewegung der inkompressiblen zähen Flüssigkeit. Nach einer Darlegung der allgemeinen Theorie wird berichtet über: die eindimensionale Bewegung, zähe Flüssigkeit in Rotation, die zweidimensionale Bewegung, die Theorie der laminaren Grenzschicht, dreidimensionale Bewegungen und zum Schluß über Näherungsmethoden zur Berechnung des Widerstandes bei einer Bewegung durch eine zähe Flüssigkeit. Der III., ebenfalls von B. bearbeitete Hauptteil befaßt sich mit der turbulenten Strömung. Nach einer Darlegung der experimentellen Ergebnisse und der bis jetzt vorhandenen theoretischen Ansätze im 1. Kap. wird im 2. die Bedeutung der scheinbaren Zähigkeit einer Flüssigkeit erörtert. Das 3. Kap. behandelt die Strömung in Kanälen (Hydraulik). Im IV. Hauptteil legt B. die Probleme der Strömung kompressibler Flüssigkeiten dar. Es werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt und insbesondere die Strömungen von Gasen behandelt und die Strömung um feste Körper mit hohen Geschwindigkeiten. Am Schluß jedes Kapitels bzw. in sich geschlossener Unterabteilungen befinden sich ausführliche Literaturverzeichnisse, am Schluß des ganzen Bandes außerdem eine Zusammenstellung sämtlicher Literaturhinweise.

I. Lotz (Göttingen).

Silla, Lucio: Influenza della compressibilità sui fenomeni aerodinamici. Aerotecnica 12, 175—180 (1932).

Ziel der Arbeit ist die Berechnung des Auftriebes des unendlich breiten Tragflügels mit vorgegebenem Profil für den Fall, daß die Anblasegeschwindigkeit so hoch ist, daß die Kompressibilität der Luft berücksichtigt werden muß. Zunächst wird kurz skizziert, wie Lord Rayleigh, Prandtl und Glauert bei verschiedenen aerodynamischen Problemen die Kompressibilität berücksichtigt haben. Glauert hat das vorgegebene Problem für den dünnen Flügel bei kleinem Anstellwinkel gelöst. Verf. will ein beliebiges Profil behandeln. Zu diesem Zweck bildet er das Profil auf

einen Kreis ab und transformiert die Kontinuitätsgleichung der kompressiblen Strömung

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{2a^2} (v \operatorname{grad} v^2)$$

(a = Schallgeschwindigkeit) unter der Voraussetzung, daß ein Geschwindigkeitspotential existiert. Die entstehende Differentialgleichung $\Delta \varphi = f(\varphi)$ wird durch sukzessive Approximation gelöst, indem auf der rechten Seite $f(\varphi)$ zunächst durch $f(\varphi_0)$ ersetzt wird, wo φ_0 das Potential der inkompressiblen Strömung bedeutet. Zum Schluß wird eine ausführliche Darstellung der Theorie angekündigt, die auch ihre Eignung für die numerische Rechnung zeigen soll. *I. Lotz (Göttingen).*

Theodorsen, Theodore: The theory of wind-tunnel wall interference. Nat. Advis. Com. Aeronautics, Rep. Nr 410, 1–11 (1931).

Bei der experimentellen Bestimmung des Auftriebes eines Tragflügels im Windkanal muß man gegenüber dem im unendlich ausgedehnten Luftstrom befindlichen Flügel den Einfluß der Strahlbegrenzung berücksichtigen. Verf. setzt voraus, daß der Flügel klein ist gegenüber dem Strahlquerschnitt. Unter der Annahme verschwindender Spannweite wird dann die am Ort des Tragflügels erzeugte vertikale Störungsgeschwindigkeit berechnet. Die Aufgabe kann bekanntlich auf ein Problem der Potentialtheorie zurückgeführt werden und mit Hilfe der Spiegelung gelöst werden. Im einzelnen wird behandelt: der rechteckige geschlossene Kanal, der Strahl mit zwei festen vertikalen Wänden und horizontalen freien Grenzen, der Strahl mit zwei festen horizontalen Wänden und vertikalen freien Grenzen, der Strahl mit festem Boden und der vollkommen freie Strahl mit ebenfalls rechteckigem Querschnitt. Ein Diagramm gibt den Quotienten vertikale Störungsgeschwindigkeit durch Anströmgeschwindigkeit abhängig vom Verhältnis Breite/Höhe = b/h des Strahlquerschnittes. Es zeigt sich, daß für $b/h > 2$ der Strahl mit festem Boden und drei freien Grenzflächen die kleinste Anstellwinkelkorrektur verlangt. Zum Schluß wird der Einfluß endlicher Spannweite auf das Rechnungsergebnis erörtert. *I. Lotz (Göttingen).*

Awbery, J. H.: Current flow in a circular disk. (Phys. Dep., Nat. Phys. Labor., Teddington, Middlesex.) Philos. Mag., VII. s. 13, 674–681 (1932).

Aufgabe ist, den elektrischen Widerstand einer Kreisscheibe mit Radius a zu berechnen, wenn durch zwei Elektroden, symmetrisch im Abstände $2b$ auf einem Durchmesser liegend, der Strom zugeführt und die Spannung zwischen irgendwelchen 2 symmetrischen Punkten auf demselben Durchmesser gemessen wird. Der Widerstand ändert sich mit dem Abstände $2c$ der beiden Meßpunkte. Als Bedingung sind die Potentiale $\pm \bar{V}_0$ in den beiden Endpunkten des betrachteten Durchmessers gegeben, und wegen Symmetrie ist das Potential des zu diesem senkrechten Durchmessers überall Null. Als Potentialfeld kann das elektrische Strömungsfeld der Scheibe mittels konformer Abbildung gewonnen werden, wenn die beiden Elektroden als die ganze Scheibe durchsetzend gedacht sind, um ein zweidimensionales Feld zu liefern. Zunächst gibt $t = (z + ia)^2 / (z - ia)^2$ die Abbildung der Halbkreisfläche (in z -Ebene) auf die obere t -Halbebene, wobei der betrachtete Durchmesser als Strömungslinie in die positive reelle Halbachse übergeht und der Halbkreisbogen in die negative reelle Halbachse. Weiters gibt das Schwarz-Christoffelsche Theorem die Abbildung der oberen t -Halbebene auf einen Parallelstreifen der w -Ebene. (In der Tafel über die Zuordnung der w - und t -Punkte sind die w -Punkte unvollständig angegeben, die Korrektur ist leicht mit Figur 2.) Aus der Parallelströmung der w -Ebene werden die Strömungslinien zurückgeführt in die Kreisfläche der z -Ebene und der Widerstand errechnet als

$$R = \frac{\rho}{\pi l} \cdot \ln \left\{ \pm \frac{(c-a)^2(b-a)^2 - (c+a)^2(b+a)^2}{(c-a)^2(b+a)^2 - (c+a)^2(b-a)^2} \right\},$$

wo ρ den spezifischen Widerstand, l die Dicke der Scheibe und a, b, c die oben gegebenen Abstände bedeuten. Als Vorzeichen ist jenes zu wählen, das den Logarithmand positiv macht. Die speziellen Fälle sind interessant: $R = \infty$ für $c = b$; $R = 0$

für $c = 0$; $R = \frac{e}{2\pi l} \cdot \ln \frac{a+c}{a-c}$ für $b = a$. Der letzte Fall wird auch aus dem Felde zweier Punktladungen erklärt. Endlich wird der Einfluß kleiner Ungenauigkeiten in der Lage der Spannungsmeßelektroden untersucht. *Ernst Weber* (New York).

Pascal, Mario: Azioni di correnti fluide tridimensionali e circolazione superficiale. *Aerotecnica* 12, 167—174 (1932).

Stimmt inhaltlich überein mit der dies Zbl. 3, 371 ref. Arbeit des Verf.

I. Lotz (Göttingen).

Lange, W.: Stationäre Wirbel in scherenden Flüssigkeitsströmungen. *Ann. Physik*, V. F. 13, 9—37 (1932).

Die Entstehung der Turbulenz kann man auf Grund von Experimenten als eine Frage nach der Stabilität einer gegebenen Flüssigkeitsströmung gegen Störungsbewegungen auffassen. Der allgemeinen theoretischen Behandlung stellen sich infolge der Form der hydrodynamischen Gleichungen große Schwierigkeiten entgegen. Verf. versucht deshalb, eine anschauliche Vorstellung der Vorgänge an Hand einfacher Beispiele von Grundströmungen zu gewinnen, und behandelt Parallelströmungen in X -Richtung mit in Y -Richtung veränderlicher Geschwindigkeit. Diese Hauptströmung soll durch eine auf der X -Achse liegende Wirbelschicht von geringer periodisch veränderlicher Intensität $\Gamma = \Gamma_0 \cdot \sin \alpha x$ gestört werden; und die Frage ist, ob ein Gleichgewichtszustand erreicht wird. Unter Vernachlässigung der Zähigkeit zunächst wird eine Integral- und eine Differentialgleichung für die gesuchte stationäre Geschwindigkeitsverteilung aufgestellt und für zwei Beispiele: Hauptströmung $u = U \cdot \sin \beta y$ und $u = U \cdot \Im g \delta y$ ($U = \text{konst.}$) das indifferente Gleichgewicht bestimmt, das beim Verhältnis $\alpha/\beta = 1$ bzw. $\alpha/\delta = 1$ besteht. Im zweiten Teil wird der Einfluß der Zähigkeit erörtert: 1. die zeitliche Änderung der im indifferenten Gleichgewicht befindlichen Strömung durch die Zähigkeit; 2. die Bedingung, unter der trotz Zähigkeitswirkungen ein indifferenten Gleichgewichtszustand vorhanden ist. Im dritten Teil diskutiert der Verf. die Einwirkung von Störungen auf eine Strömung, wenn die Bedingungen des indifferenten Gleichgewichts nicht exakt erfüllt sind. *I. Lotz*.

Szymanski, Piotr: Quelques solutions exactes des équations de l'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 11, 67—107 (1932).

Let w satisfy the equations

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} = F(y),$$

$$w = 0 \text{ for } x = 1 \text{ and } y \geq 0, \quad w = 0 \text{ for } y = 0 \text{ and } 0 \leq x \leq 1,$$

then w is regular for $y \geq 0$ and $0 \leq x \leq 1$ only if $F(0) = 0$. An examination of the case $F(y) = 1$ shows that $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ approaches the value 1 when $x = 1$ and $y \rightarrow 0$ but approaches the value 0 when $y = 0$ and $x \rightarrow 1$. As $y \rightarrow \infty$ the corresponding motion in the cylindrical tube approaches that of Poiseuille. — When $F(y)$ is periodic w is not periodic but it approaches a periodic function as $y \rightarrow \infty$. — A discussion is also given of the case in which $F(y)$ satisfies the conditions:

$$F(0) = 0, \quad F(\infty) = h, \quad \int_0^\infty |F(y) - h| dy \text{ exists,}$$

$F(y)$ is continuous and $F(y)$ and $F'(y)$ are both of bounded variation in the interval $0 \leq y \leq \infty$.

H. Bateman (Pasadena).

Odqvist, Folke K. G.: Beiträge zur Theorie der nichtstationären zähen Flüssigkeitsbewegungen. I. *Ark. Mat. Astron. Fys.* 22 A, Nr 28, 1—22 (1932).

Die Arbeit behandelt Spezialfälle der aus dem Problemkreis von Oseen stammenden Randwertaufgabe, die „linearisierten“ Gleichungen der Hydrodynamik:

$$\Delta u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x_i}; \quad \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

zu integrieren bei vorgegebenen Randwerten u_i auf einer im allgemeinen auch von t abhängigen Randfläche T . Bei zeitunabhängigem und geschlossenem T werden Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen benutzt, für den allgemeineren Fall eines nicht geschlossenen T nach einer Laplace-Transformation die Oseenschen Fundamentalfunktionen. Schließlich wird das allgemeine Problem in ähnlicher Weise als Erweiterung der Stokesschen Gleichungen formuliert, wie die Wärmeleitungsgleichung als Erweiterung der Potentialgleichung anzusehen ist. *F. Noether (Breslau).*

Prescott, J.: The equations of motion of a viscous fluid. *Philos. Mag.*, VII. s. 13, 615—623 (1932).

Ableitung der Bewegungsgleichungen einer kompressiblen zähen Flüssigkeit unter der Annahme, daß die Zähigkeit gegenüber den Volumenänderungsgeschwindigkeiten Null ist. *I. Lotz (Göttingen).*

Crocco, Luigi: Su di un valore massimo del coefficiente di trasmissione del calore da una lamina piana a un fluido scorrente. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 14, 490—496 (1931).

Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Aufstellung einer Beziehung für den Wärmeübergang zwischen ebener Platte und der längs dieser strömenden Luft, bei Berücksichtigung der in der Grenzschicht erzeugten Wärme. Durch Kombination der Differentialgleichung für die Grenzschicht mit derjenigen von Pohlhausen für die Temperaturverteilung in strömenden zähen Flüssigkeiten gelangt der Verf. bei Annahme turbulenter Grenzschicht $\left(\sigma = \gamma C_p \frac{\gamma_{\text{Turb}}}{\lambda_{\text{Turb}}}\right) = 1$ zu einer das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld der Grenzschicht verbindenden Differentialgleichung. Es ergeben sich zwei partikuläre Lösungen: die erste gilt für den Fall einer wärmeundurchlässigen Plattenbegrenzung; die gesamte durch Reibung erzeugte Wärme verbleibt hierbei in der Grenzschicht. Die zweite Lösung gilt bei Vernachlässigung der durch Reibung erzeugten Wärme. Für den Wärmeübergang gilt in diesem Falle die bekannte Gleichung von Latzko. Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Überlagerung der beiden partikulären Lösungen. Unter Zugrundelegung des auch von Latzko benutzten Kármánschen Gesetzes für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht gelangt der Verf. zu einer erweiterten Beziehung für den Wärmeübergang, aus welcher sich ergibt, daß der Wärmeübergang zwischen Platte und Luft, bei Berücksichtigung der in der Grenzschicht erzeugten Wärme, der gleiche ist wie derjenige, der sich aus der Gleichung von Latzko ergibt, wenn man für die Temperatur der Luft außerhalb der Grenzschicht diejenige Temperatur einsetzt, die sich bei adiabatischer Stauung ergeben würde. Der Verf. schließt mit einer Bestimmung des bei der erweiterten Beziehung vorhandenen Maximums des Wärmeüberganges. *S. del Proposto.*

Klassische Theorie der Elektrizität.

Herzfeld, Karl F.: On the equations of Laplace and Maxwell. (*Dep. of Phys., Johns Hopkins Univ., Baltimore.*) *Physic. Rev.*, II. s. 39, 497—503 (1932).

Verf. untersucht die Möglichkeit, die Elektrodynamik auf einem System von Axiomen aufzubauen, welche keine explizite Annahme über die Abhängigkeit der Kräfte von der Entfernung enthalten. Zunächst wird ein Axiomensystem für die Elektrostatik aufgestellt; die Erweiterung auf den allgemeinen Fall bewegter Ladungen geschieht dann durch eine Lorentz-Transformation. Es wird ausgegangen von der Gleichung $F = \varrho M$, (1), die als Definition des Feldtensors M aufgefaßt wird; dabei ist F die ponderomotorische Viererkraft, ϱ der Dichte- und Stromtensor. Je nach dem Transformationscharakter von ϱ und M ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, welche kurz erörtert werden. Als Hauptaxiome treten auf: die Existenz eines Feldtensors, die Existenz eines Potentials, das Superpositionsprinzip für das Potential, die Homogenität und Isotropie des Raumes. Weitere Axiome begrenzen die Bestimmung des

Feldes durch die Ladungsdichte. Zum Schluß wird darauf hingewiesen, daß bereits Gl. (1) die Existenz freier Magnetpole ausschließt und mithin die Divergenzfreiheit des magnetischen Feldes bedingt; die im Falle der Existenz freier Magnetpole nötigen Abänderungen der Feldgleichungen werden angegeben. *L. Rosenfeld (Lüttich).*

Price, A. T.: Electromagnetic induction in a uniform permeable conducting sphere. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 233—245 (1931).

A problem of electromagnetic induction in a uniform sphere is discussed, when the permeability has any constant positive value, and the inducing field is analyzed into spherical harmonics. The author obtains the solution first in a symbolic form, by means of Heaviside operational calculus, and then interprets it in a form suitable for actual calculation. At the end of the paper the case of an arbitrary continuous permeability is briefly treated by using some well known formulas for inversion of Laplace integrals.

J. D. Tamarin (Providence).

Güntherschulze, A.: Elektronen, Protonen und der sogenannte Elektronenmagnetismus. (Elektrotechn. Inst., Techn. Hochsch., Dresden.) Z. Physik 74, 692—706 (1932).

Ausgehend von der Tatsache, daß in quasistationären Verhältnissen die elektromagnetischen Wirkungen noch als Fernwirkungen der atomistischen Ladungsträger aufeinander gedacht werden können und das Feld als selbständige physikalische Realität entbehrlich ist, wird der Versuch gemacht, die magnetischen Feldgrößen aus der Beschreibung zu eliminieren. Demgemäß wird die übliche Gedankenkette: „Magnetfeld bewegter Ladungen wirkt durch Lorentz-Kraft bewegend auf Ladungen ein“ in eine „Geschwindigkeitsfernkraft“ zwischen Ladungen zusammengezogen; die andere: „Stromänderung (d. h. Beschleunigung von Ladungen) wirkt durch Magnetfeldänderung induzierend, d. h. stromändernd (also wieder beschleunigend)“ in eine „Beschleunigungsfernkraft“ zwischen Ladungen. Da die hierfür gegebenen Ansätze nicht aus der bekannten Theorie hergeleitet, sondern nur durch eine Zahl von Beispielen illustriert werden, ist ihr Geltungsbereich aus der Arbeit nicht zu entnehmen.

Fues (Hannover).

Masotti, Arnaldo: Condensatori cilindrici con una armatura filiforme. I. Rend. Ist. lombardo Sci., II. s. 64, 1144—1152 (1931).

Bestimmung der Kapazität zylindrischer Kondensatoren von der Form der Einleiterkabel, wenn der Querschnitt des Mantels eine geschlossene Kurve beliebiger Gestalt ist und der Leiter eine beliebige Lage im Dielektrikum erhält. Ist der Querschnitt des Leiters Null (fadenförmiger L.) so wird bei geerdetem Mantel das Potential des zugehörigen ebenen elektrischen Feldes durch die Greensche Funktion des Querschnitts dargestellt. Das Feld bleibt unverändert, wenn man (bei gleichbleibender Ladung) den fadenförmigen Leiter durch einen solchen von endlichem Querschnitt ersetzt, sofern als solcher Querschnitt eine Höhenlinie der Greenschen Funktion gewählt wird. In der Umgebung des Quellpunkts sind nun die Höhenlinien in Näherung Kreise, und man kann somit den Leiterquerschnitt, wenn man ihn klein genug wählt, durch einen Kreis ersetzen, ausgenommen nur den Fall, daß er allzu nahe an den Mantel heranrückt. Man erhält so eine einfache Näherungsformel, die die Kapazität in Abhängigkeit von dem Halbmesser des kreisförmigen Querschnitts des Leiters und von der Lage seines Mittelpunktes angibt.

G. Prange (Hannover).

Masotti, Arnaldo: Condensatori cilindrici con una armatura filiforme. II. Rend. Ist. lombardo Sci., II. s. 64, 1153—1166 (1931).

Nach der in der ersten Arbeit abgeleiteten Formel bestimmt Verf. die Kapazität für die Fälle, daß der Querschnitt des Kabels ein Kreis (gewöhnliches exzentrisches Einleiterkabel) bzw. eine von einer Geraden begrenzte Halbebene (Freileitung gegen Erde) ist, sowie in den Fällen, daß er ein Halbkreis bzw. Viertelkreis ist, bzw. daß er eine von zwei senkrechten Geraden begrenzte Vierelebene oder ein von zwei parallelen Geraden begrenzter Streifen ist. — Anschließend bestimmt er für einen allgemeinen Querschnitt die mechanischen Kräfte, die der Leiter bzw. der Mantel vom

Felde her erfahren, und schließt mit einigen Bemerkungen zum Fall des fadenförmigen Leiters. *G. Prange (Hannover).*

Arkadiew, W.: Über die Berechnung der magnetischen Permeabilität von Drähten und über eine Entstehungsursache scheinbarer Banden in magnetischen Spektren. (*Magnet. Labor., Univ. Moskau.*) *Z. Physik* **74**, 396—417 (1932).

Um aus Messungen von praktisch zugänglichen Größen, wie dem Wechselstromwiderstand eines Drahtes, seiner Selbstinduktion, seiner Permeabilität und der magnetischen Verluste in Feldern hoher Frequenz, auf die Materialkonstanten für diese Frequenz schließen zu können, ist eine Umrechnung notwendig, die vom Verf. früher [*Z. Physik* **27**, 37 (1924)] unter Vernachlässigung des Skin effekts vorgenommen worden war. Dieser Effekt wird jetzt berücksichtigt, und dabei zeigt sich, daß er bei der alten Berechnungsweise eine Abhängigkeit der Konstanten (Real- und Imaginärteil der Permeabilität) von der Frequenz vortäuschen kann. Bei Berücksichtigung des Skin effekts hängen alle Größen von zwei Parametern ab, um also sichere Rückschlüsse machen zu können, muß man in jedem Fall zwei der obenerwähnten Größen kennen. *Peierls (Zürich).*

Dubourdieu: Champ électromagnétique produit par un fil parcouru par un courant alternatif sinusoïdal au-dessus d'une couche conductrice. *C. R. Acad. Sci., Paris* **194**, 848—850 (1932).

Ein Draht verläuft in endlicher Höhe in der Luft parallel zu einer halbleitenden Schicht der Dicke δ . Verf. gibt Ausdrücke in Form unendlicher Integrale für das entstehende elektromagnetische Feld. In besonders einfachen Fällen decken sich diese Ausdrücke mit bereits publizierten Formeln von F. Pollaczek und T. Levi-Civita.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Nyquist, H.: Regeneration theory. *Bell Syst. Techn. J.* **11**, 126—147 (1932).

Die Ausgangsseite eines linearen Verstärkers wird auf regelbare Weise mit der Eingangsseite verbunden. Wenn diese Kopplung (Regeneration) einen gewissen kritischen Wert überschreitet, wird das Gesamtsystem instabil, d. h. ein kleiner Impuls gibt zu fortwährend wachsenden Amplituden Anlaß. Verf. bemerkt, daß nichtlineare Verstärker als in einem kleinen Anstiegsgebiet linear betrachtet werden können, wodurch die Bedingungen für ihre Instabilität ebenfalls aus vorliegender Untersuchung angenähert entnommen werden können. Mathematisch wird die Untersuchung mit Hilfe einer Greenschen Funktion und komplexer Integration durchgeführt und an einigen praktischen Beispielen erläutert. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

Labus, J.: Berechnung der Strahlungsenergie von Dipolantennen (Telefunkenrichtantennen) nach der Poyntingschen Methode. *Elektr. Nachr.-Techn.* **9**, 61—67 (1932).

Es handelt sich hierbei mathematisch um Integrale vom Typus:

$$I = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \int_{\alpha=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2} \cos \alpha \sin \gamma\right) \cdot \sin^2\left(\frac{m\pi}{2} \sin \alpha\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha \sin \gamma\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha\right) \cdot \cos \alpha} d\alpha d\gamma.$$

Durch Polynomentwicklung des Integranden wird dieser Ausdruck zurückgeführt auf eine Summe von Integralen, welche unter der vereinfachenden Näherung $\cos \frac{\pi \alpha}{2} (1 - x^2)^{-1} \cong 1$ vom Faltungstypus sind und somit auf ein Produkt zweier Laplacescher Integrale reduzierbar. Diese Laplaceschen Integrale lassen sich im vorliegenden Falle ausrechnen, womit das Integral I bekannt ist. Endlich wird I noch für großes m in einfacher Weise angenähert. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

Sona, Luigi: La propagazione delle onde elettromagnetiche. *Rend. Semin. mat. Univ. Padova* **2**, 108—141 (1931).

This paper contains a proof of formulae, already given (in somewhat different forms) by A. E. H. Love [*Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, **197**, 1—45 (1901)] and O. Tedone [*Rend. R. Acc. Lincei* **25** (1916)], for the electric and magnetic fields at a point external

to a fixed surface σ at any instant $\tau > 0$, when the values of the fields at points on σ are given at every instant subsequent to $t = 0$. A reciprocity formula is proved and used, together with the aid of characteristic solutions of the Maxwell-Hertz equations, to obtain the desired formulae. The agreement of Love's formulae with those of Tedone is demonstrated in an appendix.

Mary Taylor (Slough).

Siegel, E., und J. Labus: Feldverteilung und Energieemission von Richtantennen. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. **39**, 86—93 (1932).

The authors assume van der Pol's expression for the electric vector of the radiation field and the energy emitted by a Hertzian doublet and calculate the polar diagram and radiation resistance of antennae excited in harmonics of their fundamental wavelength, of series and groups of similarly excited antennae and of combinations thereof.

Mary Taylor (Slough).

Eckersley, T. L.: The vertical polar diagram of a Marconi Beam aerial. Marconi Rev. Nr **34**, 26—29 (1932).

Elementar gehaltene Übersicht der Rechnungsergebnisse vom Verf., vom Referenten und von H. Wise über die Strahlung von Antennen in einer vertikalen Ebene bei endlichem Leitvermögen der Erde. Anwendung auf eine Marconi-Richtantenne.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Relativitätstheorie.

Bortolotti, Enea: Sui fondamenti della relatività ristretta. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari **1**, 70—74 (1931).

Mariani: Relativité et quanta. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 685—687 (1932).

Der Verf. glaubt, zu einer Vereinigung von (allgemeiner) Relativitätstheorie und Quantentheorie zu gelangen, indem er statt der Punkttransformationen der Riemannschen Geometrie beliebige Berührungstransformationen betrachtet.

P. Jordan (Rostock).

Lancezos, Cornel: Stellung der Relativitätstheorie zu anderen physikalischen Theorien. Naturwiss. **1932**, 113—116.

Einleitung zu der in dies. Zbl. **2**, 423 ref. Arbeit.

Hoffmann, Banesh: On general relativity. Rev. of Mod. Phys. **4**, 173—204 (1932).

Bericht über einige fundamentale Ideen und Hypothesen der allgemeinen Relativitätstheorie. Im wesentlichen Ergänzung der bekannten Monographien. 10 Paragraphen: 1. Einleitung; 2. Raum—Zeit, Koordinatensysteme, allgemeine Invarianz; 3. Diskussion eines Experiments (Plätzen einer Bombe); 4. Gleichungen des Lichtkegels und der „Trajektorien“ (Weltlinien unbeeinflusster Körper), Existenz des g - und Γ -Feldes; 5. Experimentelle Bestimmung des g - und Γ -Feldes. — Bis hierher sind beide Felder noch unverknüpft angenommen. 6. Annahmen über g und Γ -Feld (Einführung Riemannscher Metrik), genauere experimentelle Bestimmung des g -Feldes; 7. Endgültige Festlegung des relativistischen Standpunktes. Hinweis auf die das g -Feld bestimmenden Feldgleichungen. Das zentrale Problem, wie die Materie mit dem g -Feld zu verknüpfen sei, wird bewußt nicht weiter verfolgt. In den bleibenden Paragraphen wird der Sinn einiger Termini herausgearbeitet, der in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht ohne weiteres klar ist: 8. Trägheitskompaß, Beschleunigung und Rotation von Koordinatensystemen; 9. Relativbewegung zweier Körper, Lichtgeschwindigkeit; 10. Dopplereffekt. — Die Darstellung ist absichtlich möglichst frei von Formeln. 11 Figuren stützen die Anschauung.

Heckmann (Göttingen).

Lancezos, Cornelius: Electricity as a natural property of Riemannian geometry. (Dep. of Math., Purdue Univ., Lafayette.) Physic. Rev., II. s. **39**, 716—736 (1932).

This paper is an exposition in English of the theory which was published in Z. Physik **73**, 147 (1931) (cf. this. Zbl. **3**, 177). Some new features are however given in the latter part of the paper: in particular, a new exact partial differential equation

for the electric vector-potential is found. This, being a vector equation, represents 4 equations, which with the 10 field-equations determine the 10 components of the contracted Riemann tensor and the 4 components of the vector-potential. Proper solutions of the equations for the vector-potential must represent the electron and proton. Both electricity and gravitation are regarded as manifestations of the geometrical structure of the world, which is of Riemannian type, the fundamental characteristic quantity being the curvature-tensor R_{ik} . There is no material energy-tensor such as appears in Einstein's theory, since such a material tensor would imply the denial of the field-equations in certain regions, and would therefore be equivalent to admitting the existence of singularities of the metric, which are not allowed in this theory. — In the last section of the paper, the author gives reasons for taking the first tetrad of Maxwell's equations in the form

$$(F_i^{\cdot\alpha})_{\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0,$$

where F_{ik} is the six-vector which represents the electric and magnetic field-strengths, and φ is a scalar: this may be compared with the classical equation

$$(F_i^{\cdot\alpha})_{\alpha} = J_i$$

where J_i is the electric current-vector. The second tetrad of Maxwell's equations expresses the usual condition that the six-vector dual to F_{ik} should have a zero divergence.

Whittaker (Edinburgh).

Lanezos, Cornel: Zum Auftreten des Vektorpotentials in der Riemannschen Geometrie. (Dep. of Math., Purdue Univ., Lafayette.) Z. Physik 75, 63—77 (1932).

This paper represents the additional matter given in the last part of the paper published in Physic. Rev. 39, 716 (1932) (cf. the above abstr.). — The author suggests that electric charge is connected with a non-stationary character in the world, and probably with a pulsation of the metric; electrons and protons might possibly be regarded as vibrating "with the phase" and "against the phase". Whittaker.

Parsons, J. D.: Solution with axial symmetry of Einstein's equations of teleparallelism. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 3, 37—45 (1932).

The author obtains a more general solution of this problem than that given by McVittie [Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 2, 140—150 (1931); this Zbl. 1, 244]. The solution of the field-equations of teleparallelism in which Einstein's h^{μ}_{ν} , and so the $g_{\mu\nu}$, are functions of one coordinate x alone, is shown to lead to the metric

$$ds^2 = -dx^2 - \frac{dy^2 + dz^2}{(1 + \beta x)^2} + \frac{dt^2}{(1 + \alpha x)^2}. \quad (\alpha, \beta \text{ const})$$

The variables are chosen to reduce to Galilean coordinates at the origin. It is shown that with $\alpha = -\beta$ this agrees to a first approximation with the field of constant electric force $-\alpha/2\sqrt{\pi}$ derived on Einstein's theory of 1916. According to Einstein's new theory a first approximation to the electromagnetic force tensor $\alpha_{\mu\nu}$ is given by

$$a_{\mu\nu} = e_{\mu} h_{\mu\nu} - e_{\nu} h_{\nu\mu} \quad (e_1 = e_2 = e_3 = -1, e_4 = 1) \quad (1)$$

where $h_{\mu\nu}$ is given by $h_{\mu}^s = \delta_{\mu}^s + h_{s\mu}$ ($\delta_{\mu}^s = 0$, $s \neq \mu$; $\delta_{\mu}^{\mu} = 1$), and $h_{s\mu}$ is small. The author shows however that in the present case this leads to an indeterminate value for the electric intensity, since (1) is not invariant with respect to a rotation of the fundamental vectors h_{μ} .

W. H. McCrea (Edinburgh).

Einstein, A., and W. de Sitter: On the relation between the expansion and the mean density of the universe. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 213—214 (1932).

Im Anschluß an eine Note des Ref. (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Kl. II 1931, Nr 15, 126—130; vgl. dies. Zbl. 3, 32) — in der gezeigt wird, daß in den nichtstatischen Lösungen der Feldgleichungen der Relativitätstheorie bei räumlich konstanter Massendichte die räumliche Krümmung nicht nur positiv, sondern auch Null oder

negativ sein kann — machen die Verff. darauf aufmerksam, daß die Annahme des Linienelements

$$ds^2 = -R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2 dt^2,$$

$R = R(t)$, c = Lichtgeschwindigkeit (also die spezielle Annahme euklidischer Raummetrik) mit den Beobachtungen im Einklang steht, wenn man die (etwas fragwürdige) kosmologische Konstante $\lambda = 0$ setzt. Es ergibt sich nämlich dann

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{c dt} \right)^2 = \frac{1}{3} \kappa \rho,$$

also eine Beziehung zwischen der beobachteten Ausdehnungsgeschwindigkeit der Welt und der Dichte der Materie, die von den bisher bekannten Daten ziemlich gut erfüllt wird (in Anbetracht namentlich der Unsicherheit bei der Bestimmung von ρ). Die Verff. betonen ferner, daß — unter der Annahme $\lambda = 0$ — prinzipiell eine Entscheidung über die in der Welt verwirklichte Raummetrik möglich ist.

Heckmann (Göttingen).

Tolman, Richard C., and Morgan Ward: On the behavior of non-static models of the universe when the cosmological term is omitted. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) *Physic. Rev.*, II. s. 39, 835—843 (1932).

1. Einleitung: allgemeine Bemerkungen über den kosmologischen Zusatzterm λg_{ik} der Feldgleichungen der Relativitätstheorie. 2. Ziel der Arbeit: Diskussion des Verhaltens nichtstatischer Modelle der Welt mit $\lambda = 0$ unter ziemlich allgemeinen Annahmen über die das Modell erfüllende Materie. 3. Rekapitulierung der Mechanik nichtstatischer Modelle. 4. Annahmen: sphärische Raummetrik von zeitlich veränderlicher Krümmung. Inhalt der Welt sei ein Gemisch von isotrop verteilter Materie und Strahlung, das Zugwirkungen keinen Widerstand entgegengesetzt und stets positiven Druck und positive Energiedichte habe. Folgerung aus den Feldgleichungen: Dann existiert eine obere Grenze für den Krümmungsradius des Raumes. 5. Nachweis, daß die obere Grenze in endlicher Zeit erreicht wird. 6. Die untere Grenze des Krümmungsradius ist Null und wird ebenfalls in endlicher Zeit erreicht. Druck und Dichte werden in diesem Augenblick unendlich. 7. Trotz der Singularität im Verhalten der Welt beim Verschwinden des Krümmungsradius glauben die Verff., daß der mathematischen Möglichkeit, die Lösungen durch diesen Punkt hindurch fortzusetzen, sehr wohl auch eine physikalische Bedeutung zukomme. Heckmann (Göttingen).

Eddington, Arthur: The expanding universe. *Nature* 1932 I, 421—423.

Quantentheorie.

● **Planck, Max: Der Kausalbegriff in der Physik.** Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1932. 26 S. RM. 1.35.

Seeger, R. J.: A critique of recent quantum theories. II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 18, 303—310 (1932).

Vgl. dies. Zbl. 1, 375.

● **Waerden, B. L. van der: Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik.** (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit bes. Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, M. Born u. C. Runge. Bd. 36.) Berlin: Julius Springer 1932. VIII, 157 S. u. 7 Abb. RM. 9.—.

I., „Quantenmechanische Einleitung“, enthält u. a. eine vorläufige Orientierung über die Wellengleichung eines Atoms und eines (zweiatomigen) Moleküls und die Behandlung des Elektrons im zentralsymmetrischen Felde (alles noch ohne Spin). Verf. versucht in möglichst engem Kontakt mit der physikalischen Praxis zu bleiben; es werden z. B. die Serienspektren diskutiert und für einige Beispiele durch Sprungschemas erläutert. Der Schluß des Kapitels enthält die Störungsrechnung und die Quantisierung des Impulsmomentes mit der Theorie des (normalen) Zeemaneffektes. II., „Gruppen und ihre Darstellungen“, enthält eine trotz größter Knappheit (das ganze Kapitel enthält nur 34 Seiten!) außergewöhnlich klare Darstellung der linearen Algebra und der Darstellungstheorie. In III., „Drehungsgruppe und Lorentz-Gruppe“, werden erst die Beziehungen der linearen Gruppe c_2 und der unitären Gruppe

u_2 zur Drehungsgruppe \mathfrak{d}_3 , und die Darstellung \mathfrak{D}_f von c_2 bzw. u_2 durch Formen $2J$ -ten Grades aufgestellt. Als Beispiel wird die Darstellung $\mathfrak{D}_f \times \mathfrak{D}_f$ ausreduziert, woraus einige Schlußfolgerungen über die S -, P -, D -, F - usw. Terme eines Atoms mit mehreren Leuchtelektronen gezogen werden; auch die Auswahl- und Intensitätsregeln werden aufgestellt. Der Schlußparagraph des Kapitels enthält die Darstellungen der Lorentz-Gruppe; die Spinoranalyse des Verf. wird nur kurz auseinandergesetzt. Die schönen Anwendungen der Spinoranalyse, die Laporte und Uhlenbeck gegeben haben, hat Verf. leider nicht in sein Buch aufgenommen. In IV., „Das spinning Elektron“, wird zuerst die klassische Spintheorie nach bekannter Art in die drei Hypothesen zusammengefaßt. Aus diesen drei Hypothesen (und der Annahme, daß für jedes Elektron nur ein Spin-Freiheitsgrad hinzutritt) wird die Transformationstheorie der Wellengleichung des Elektrons mit Spin abgeleitet, ohne daß noch für die Wellengleichung selbst eine spezielle Annahme gemacht zu werden braucht. Nachher erst wird die Theorie auf die Diracsche Wellengleichung angewandt. Der Schluß des Kapitels enthält die (unrelativistische) Theorie des f -Elektronenproblems; die Multipllettstruktur ergibt sich durch Ausreduktion der Darstellung $\mathfrak{D}_L \times \mathfrak{D}_\frac{1}{2} \times \mathfrak{D}_\frac{1}{2} \times \dots \times \mathfrak{D}_\frac{1}{2}$. Schließlich wird der anomale Zeeman-Effekt behandelt, für schwache Magnetfelder (Landésche Formel), mittlere und starke Magnetfelder (Paschen-Back-Effekt). In V., „Die Permutationsgruppe und das Pauli-Verbot“, wird vorerst der „Symmetriecharakter“ samt Auswahlregel (für den Fall von zwei Elektronen) abgeleitet und am He-Bogenspektrum erläutert. Sodann werden die Stonersche Regel und das Pauli-Verbot behandelt, letzteres nach bekannter Art in drehungsinvarianter Form. Das periodische System der Elemente wird auf Grund dieses Verbotes sorgfältig durchdiskutiert. Zur gruppentheoretischen Ordnung der Atomspektren wird die Heitlersche Methode (zuerst die spinlosen Ortsfunktionen und die Spinfunktionen je für sich ausreduzieren und dann dem Pauli-Verbot Rechnung tragen) kurz erwähnt und die Slatersche Methode, welche die Darstellungstheorie der Permutationsgruppe (Youngsche Symmetrieeoperatoren) vermeidet (Bahnen und Spin gleichzeitig permutieren und von vornherein nur die asymmetrischen Eigenfunktionen in Betracht ziehen), ausführlicher behandelt. Mit ihrer Hilfe wird die Frage, welche Multiplets aus gegebenen Elektronentermen entstehen können, behandelt. Zur Berechnung der Energiewerte und Eigenfunktionen eines Atoms wird die Wechselwirkung der Elektronen nach Hartree durch eine Abschirmung des Kernfeldes ersetzt; abweichend von Hartree wird aber für alle Abschirmungsfelder und alle Zustände ein und dasselbe (mittlere) Abschirmungsfeld gewählt. Zur Hauptachsentransformation der Störungsmatrix wird die obengenannte zweite (Slatersche) Methode angewandt. Zum Schluß wird die nur mit der ersten Methode zu behandelnde Frage nach den Raumfunktionen allein und den Spinfunktionen allein behandelt. Ihre Beantwortung beruht auf dem Satz: Alle mit den Matrizen von π vertauschbaren Matrizen (wozu sicher die Matrizen von δ gehören) sind Linearkombinationen der Matrizen von δ , wo π bzw. δ die Darstellungen der Permutationsgruppe \mathfrak{S}_f bzw. der unitären Gruppe u_2 im 2^f -dimensionalen Spinraum sind. In VI., „Molekülspektren“, werden zunächst die Molekülquantenzahlen für ein System, bestehend aus zwei Kernen und Elektronen, eingeführt. Sodann wird zunächst die Rotationsaufspaltung (ohne Spin) und die Multiplettaufspaltung (Spinwirkung) berechnet, in den beiden Fällen, wo letztere groß und wo sie klein ist im Vergleich zur ersteren. Es folgt ein ausführlicher Paragraph über die adiabatische Entstehung eines Moleküls aus zwei Atomen. Der Schlußparagraph enthält eine kurze Besprechung der drei Methoden zur Abschätzung der Energie eines Moleküls (für großen bzw. kleinen bzw. mittleren Kernabstand).

D. van Dantzig (Delft).

● Dirac, P. A. M.: Les principes de la mécanique quantique. Traduit par Al. Proca et J. Ullmo. (Rec. des conférences-rapports de documentation sur la physique. Vol. 21.) Paris: Presses univ. de France 1931. VIII, 314 S. geb. Frs. 95.—.

Französische Übersetzung des bekannten Buches von Dirac über Quantenmechanik.

Destouches, Jean-Louis: Intégration de l'équation aux intégrales premières de la mécanique quantique. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 589—591 (1932).

Ein allgemeiner quantenmechanischer Operator X , der auch explizit von der Zeit abhängen kann, ist bekanntlich dann ein Integral der Bewegungsgleichungen mit der Hamiltonschen Funktion $H(x, y, z, t)$, wenn er der Beziehung

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial X}{\partial t} + HX - XH = 0$$

genügt. In der vorliegenden Note wird H als Potenzreihe in der Zeit mit Koeffizienten, die Funktionen der Koordinaten sind, angesetzt, die gleiche Entwickelbarkeit für X angenommen und danach gefragt, welche Beziehungen zwischen den Koeffizienten bestehen müssen, damit die obige Relation gilt.

O. Halpern (New York).

Elsasser, W.: Über Strom und Bewegungsgröße in der Diracschen Theorie des Elektrons. (*Inst. f. Theoret. Physik, Univ. Frankfurt a. M.*) Z. Physik **75**, 129—133 (1932).

Da in der Diracschen Theorie des Elektrons Impuls und Geschwindigkeit nicht mehr proportional sind, erscheint es möglich, daß für gewisse Bewegungszustände in geeigneten Kraftfeldern der Mittelwert des Impulses verschwindet, der des Stromes dagegen nicht. Es wird versucht, die Supraleitung als einen Effekt dieser Art zu deuten. Da bei dieser eine maximale Stromdichte nicht überschritten werden kann, brauchte auch der Strom pro Elektron nicht sehr groß zu sein. Nähere Angaben über den Mechanismus konnten jedoch noch nicht gemacht werden. *Nordheim* (Göttingen).

Szezeniowski, S., et L. Infeld: The influence of a cloud of electrons on the structure of de Broglie waves. (*Inst. of Theoret. Phys., Univ., Lwów.*) Bull. int. Acad. Polon. Sci. A Nr **6**, 482—488 (1931).

In der Arbeit wird ein eventueller Einfluß des Potentials der Raumladung der einfallenden Elektronen auf das Ergebnis von Elektronenbeugungsversuchen untersucht. Der Einfluß ist zwar klein, dürfte aber unter Umständen die Grenze der Beobachtbarkeit überschreiten. *O. Klein* (Stockholm).

Morgans, W. R.: A continuous atomic matrix. Philos. Mag., VII. s. **13**, 664—673 (1932).

Verf. berechnet die Matrixelemente (diskretes und kontinuierliches Spektrum) für die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z im quantenmechanischen Zweikörperproblem, wobei von den Eigenfunktionen in parabolischen Koordinaten Gebrauch gemacht wird. Die Arbeit ist, wie es scheint, ohne Kenntnis der Rechnungen von W. Gordon [Ann. Physik V **2**, 1031 (1929)] geschrieben, wo die meisten Resultate bereits zu finden sind. *V. Fock* (Leningrad).

Proca, Al.: Sur une explication possible de la différence de masse entre le proton et l'électron. (*Inst. Henri-Poincaré, Paris.*) J. Physique Radium, VII. s. **3**, 83—101 (1932).

Proca, Al.: Sur les grandeurs caractéristiques de l'électron de Dirac. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 836—838 (1932).

In einer früheren Note (vgl. C. R. **194**, 691 (1932); vgl. dies. Zbl. **4**, 39] glaubte der Verf., aus einer Betrachtung der Invarianten, die sich aus den Diracschen Operatoren α_i bilden lassen, den Schluß ziehen zu können, daß das Diracsche Spinelektron eine periodisch veränderliche wahre magnetische Ladung trägt. In dieser Mitteilung werden die in Betracht kommenden Invarianten, die von einer Reihe anderer Autoren herkommen, nochmals zusammengestellt, und es wird gezeigt, daß der Mittelwert der wahren magnetischen Ladung eines Elektrons bei Abwesenheit äußerer Felder verschwindet. Ob dies auch bei Anwesenheit äußerer Felder zutrifft, läßt der Verf. unentschieden, da es für ihn ein Problem darstellt, ob man die Diracsche Gleichung bei Anwesenheit elektromagnetischer Felder überhaupt sinnvollerweise anwenden darf; bezieht sie sich doch (nach Ansicht des Verf.) auf ein Partikel ohne wahre magnetische Ladung, was für das Elektron nach der oben erwähnten Note nicht der Fall sein soll. *O. Halpern* (New York).

Penney, W. G.: Effect of nuclear spin on the radiation excited by electron impact. (*Dep. of Physics, Univ. of Wisconsin, Madison.*) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **18**, 231—237 (1932).

Es wird für einige Spezialfälle der Einfluß des Kernspins auf den Polarisationszustand durch Elektronenstoß angeregter Strahlung berechnet. Es ergibt sich, daß der Polarisationszustand sehr empfindlich von der Größe des Kernspins abhängt. Ein quantitativer Vergleich der Beobachtungen an Quecksilber mit der Theorie ist aber wegen des komplizierten zugrunde zu legenden Modells einstweilen noch nicht möglich. *G. Beck* (Kopenhagen).

Beck, Guido: Bemerkung zur Theorie schnell schwingender Ladungen. *Z. Physik* **75**, 211—222 (1932).

Als relativistisches Modell eines Oszillators benützt Verf., um den Schwierigkeiten einer skalaren Potentialwand zu entgehen, das im homogenen Magnetfeld schwingende Elektron. Die aus den Dirac-Gleichungen folgenden diskreten, von 2 Raumdimensionen unabhängig gedachten (trotzdem eigentlich dreidimensionalen) Quantenzustände positiver Energie werden als Zustände eines linearen Oszillators gedeutet und in korrespondenzmäßiger Weise ihre Ausstrahlung berechnet. Im Fall äußerst starken Magnetfelds wird die emittierte Strahlung beliebig hart, dabei wächst die Strahlungsdämpfung des Oszillators zuletzt nur noch $\sim \nu$ (gegenüber der des unrelativistischen Oszillators mit ν^2), weil die veränderte Richtungsabhängigkeit der Emission deren Gesamtbetrag stark einschränkt. Der Verf. diskutiert selbst eine Reihe von Einwänden, die gegen diese Rechnung erhoben werden können (bezüglich der Eindimensionalität, der Vernachlässigung der Zustände negativer Energie und des korrespondenzmäßigen Kleinschen Ansatzes für die emittierte Strahlung), glaubt aber, daß trotzdem die größenordnungs-mäßigen Verhältnisse sehr energiereicher Strahlungsprozesse ungefähr richtig wiedergegeben werden. Seine Absicht, mit Hilfe dieser Rechnungen zum Verständnis der in Beryllium durch α -Strahlen ausgelösten durchdringenden Strahlung beizutragen, sowie die Diskussion der sie verursachenden Kernprozesse, ist wohl durch die inzwischen erfolgte Bestätigung der Neutronennatur dieser Strahlung überholt.

Fues (Hannover).

Lonn, Ernst: Beweis der Eindeutigkeit der Zerlegung einer Intensitätskurve in ihre Komponenten. *Z. Physik* **75**, 348—349 (1932).

Nachweis der Eindeutigkeit einer Entwicklung von der Form

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} e^{\beta_{\nu}(x-x_{\nu})}.$$

Fues (Hannover).

Wick, Gian Carlo: Die zweiquantigen Terme eines Elektrons im Zweizentrensystem. *Z. Physik* **74**, 773—779 (1932).

Für die Reihenfolge der Terme $\sigma(2p)$ und $\pi(2p)$ eines Elektrons im Zweizentrensystem bekam man nach zwei Methoden verschiedene Ergebnisse. Wenn man nämlich die Rechnung für große Abstände der Zentren durchführt, so muß man als Störung die Wechselwirkung zwischen dem Quadrupolmoment des p -Elektrons und dem „fremden“ Kern ansetzen, und es ergibt sich, daß $\sigma(2p)$ tiefer liegt als $\pi(2p)$. Aus dem Hundschen Zuordnungsschema, welches bei nicht zu großen Kernabständen die richtige Reihenfolge liefern muß, folgt aber, daß $\pi(2p)$ tiefer liegt. Die Terme $\sigma(2p)$ und $\pi(2p)$ (oder genauer gesagt, die Terme $\sigma_g(2p)$ und $\pi_u(2p)$ und die Terme $\sigma_u(2p)$ und $\pi_g(2p)$) müssen sich also bei ziemlich großen Kernabständen überkreuzen. Die vorliegende Arbeit zeigt nun, daß man diese Überkreuzungen gut berechnen kann, wenn man den Einfluß des $(2s)$ -Termes berücksichtigt. Die Rechnung ist nur dann gültig, wenn der Abstand der Terme $(2s)$ und $2p$ klein ist. Als ungestörte Eigenwerte werden die Eigenwerte des Wasserstoffmoleküls verwendet. Die Abschirmung wird als Störung behandelt. Die Matrixelemente der Störung ergeben sich aus der Bedingung, daß für unendlichen Zentrenabstand die Terme in $(2s)$ und $(2p)$ übergehen sollen und aus der Annahme, daß die Störungsmatrix von dem Zentrenabstand unabhängig sei. Es zeigt sich, daß für die leichtesten Elemente die erwartete Überkreuzung bei einem Zentrenabstand von 5 Å bis 10 Å erfolgt.

E. Teller (Göttingen).

Pannekoek, A.: The central intensity in the Fraunhofer lines. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **34**, 1352—1364 (1931).

Recent work by Halpern on the classical theory (this Zbl. **1**, 105), and by Woolley using a model description of resonance broadening, suggest the possibility of a transference of radiation from the wings of an absorption line to the centre. In this paper the effect of this transference on the central intensities of Fraunhofer lines is examined.

Previous theory demands zero intensity, while observed central intensities range from 7 per cent upwards. In this paper it is found that transference of radiation from wing to centre increases the central intensities of lines by a certain amount, not quite large enough to explain observed intensities, but together with which additional influences, not strong enough in themselves, may account for observed central intensities.

R. Woolley (Cambridge).

Kramers, H. A.: Die Multiplettaufspaltung bei Koppelung zweier Vektoren. Proc. Roy. Acad. Amsterdam **34**, 965—976 (1931).

Es wird eine Methode zur Bestimmung der quantenmechanischen Wechselwirkungsenergie zweier Drehimpulsvektoren l und s angegeben, die nach Russell-Saunders zur Resultierenden j gekoppelt sind, wenn die klassische Wechselwirkungsenergie nur vom Winkel ϑ zwischen l und s abhängt. Letztere kann dann in der Form

$$\Omega = \sum c_\tau \Omega_\tau \quad (1)$$

dargestellt werden, wo $\Omega_\tau = P_\tau(\cos\vartheta)$ die Legendreschen Kugelfunktionen sind. Da $\cos\vartheta = (j^2 - l^2 - s^2)/2ls$ ist, enthält jeder Term in der Summe bis auf den Faktor c_τ nur j , l und s . Auf Grund der Invarianz von (1) gegenüber Raumdrehungen, wie sie bei einem freien Atom stets vorliegt, wird bewiesen, daß auch die quantentheoretische Wechselwirkungsenergie als eine Reihe von der Form (1) beschrieben werden kann, und zwar so, daß jedes Glied einem klassischen Gliede entspricht und bis auf den Faktor c_τ ebenfalls nur eine Funktion von j , l und s ist. Hierbei bedient sich der Verf. der in einer früheren Arbeit [Proc. Roy. Acad. Amsterdam **33**, 953 (1930)] eingeführten symbolischen Schreibweise, welche auf dem Zusammenhang zwischen den Transformationseigenschaften der Kugelfunktionen und den unitären Transformationen beruht. Die Ausdrücke für Ω_τ als Funktion von j , l und s werden für $\tau = 0, 1, 2, 3$ explizit angegeben.

R. de L. Kronig (Groningen).

Schlapp, Robert: Intensities in singlet-triplet bands of diatomic molecules. Physic. Rev., II. s. **39**, 806—815 (1932).

Intensitätsformeln für die Rotationsstruktur von Singlet-Tripletübergängen bei zweiatomigen Molekeln werden gegeben für die Fälle $^1\Sigma - ^3\Sigma$, $^1\Sigma - ^3\Pi$ und $^1\Sigma - ^3\Delta$, soweit die $^3\Pi$ - oder $^3\Delta$ -Terme unter die sog. Fälle a oder b fallen. Die gemessenen Intensitäten der atmosphärischen Sauerstoffbanden werden mit dem Ergebnis verglichen.

F. Hund (Leipzig).

Kirkwood, John G.: Quantenmechanische Berechnung der Konstanten einiger polarer Moleküle. Physik. Z. **33**, 259—265 (1932).

Es werden einige Eigenschaften (Dipolmoment, Trägheitsmoment, Dissoziationsenergie, Grundfrequenz) der Halogenwasserstoffe quantenmechanisch mit Hilfe des Variationsverfahrens berechnet. Kirkwood geht vom Ionenzustand aus. Für die Wellenfunktion wird $\psi_0 \frac{1 + \lambda(v - \epsilon_1)}{\sqrt{1 + g}}$ gesetzt. Dabei ist ψ_0 die ungestörte Wellenfunktion des entsprechenden Halogenions, v ist das Störungspotential, ϵ_1 die Störungsenergie erster Ordnung, g eine Konstante, die den Zwecken der Normierung dient, und λ ist ein Parameter, der aus dem Variationsverfahren bestimmt wird. Das Störungspotential v sollte dabei das Coulombsche Feld des Protons sein. Da aber dann die Rechnung zu umständlich geworden wäre, wurde das Coulomb-Potential nach Kugelfunktionen entwickelt und nur die Kugelfunktion nullter und erster Ordnung beibehalten. Bei der numerischen Berechnung wurde der Mittelwert des Abstandsquadrates der Elektronen mit Hilfe einer von K. in einer früheren Arbeit abgeleiteten Beziehung aus der Polarisierbarkeit der Ionen entnommen (vgl. dies. Zbl. **3**, 285). Die Resultate der Rechnung stehen mit der Erfahrung in bester Übereinstimmung. Man hätte sogar wegen des Näherungscharakters der Rechnung größere Abweichungen erwartet.

E. Teller (Göttingen).

Margenau, Henry: Note on the quantum dynamical correction of the equation of state. (*Sloane Physics Laborat., Yale Univ., New Haven.*) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 18, 230 (1932).

In der in dies. Zbl. 3, 334 referierten Arbeit war im Ansatz der Zustandssumme ein falscher Zahlenfaktor verwendet worden. Die Endformel für die Zustandsgleichung wird durch die Richtigstellung nicht verändert, wenn für $x > 0$

$$\varphi(x) = 0,752x - 0,451x + 0,161x - 0,042x + \dots$$

an Stelle der in der früheren Arbeit gegebenen entsprechenden Definition gesetzt wird. — Eine inzwischen von Kirkwood durchgeführte Berechnung des Virialkoeffizienten hat zu einem Ergebnis geführt, das mit dem des Verf. grundsätzlich übereinstimmt; der Unterschied dürfte lediglich darin bestehen, daß für die Funktion $\varphi(x)$ ein geschlossener Ausdruck gegeben wird. Kirkwood hat gegen die Zustandsgleichung des Verf. eingewendet, daß darin der zweite Virialkoeffizient bei hohen Temperaturen einen kleineren Wert erhält als den klassischen. Dieser Einwand ist nicht zutreffend; vielmehr liefert die Formel des Verf. bei hohen Temperaturen den klassischen Wert.

Eisenschitz (Berlin).

Schachenmeier, R.: Wellenmechanische Vorstudien zu einer Theorie der Supraleitung. Z. Physik 74, 503—546 (1932).

Die Wechselwirkung der in einem Metall befindlichen Leitungselektronen mit den im Atom verbleibenden Rumpfelektronen wird diskutiert und mit Hilfe einer großen Zahl von Näherungsannahmen eine Wellenfunktion aufgestellt, die dieser Wechselwirkung Rechnung tragen soll. Dem Einfluß der Temperaturbewegung des Gitters wird näherungsweise Rechnung getragen. Unter diesen Annahmen erhält Verf. eine stationäre Lösung, die einem von Null verschiedenen Strom entspricht, d. h. einer Leitung ohne Widerstand. Bei einer gewissen Temperatur soll dann eine Resonanz eintreten, die die Supraleitfähigkeit zerstört. (Soweit dem Ref. sichtbar, tritt sie aber bei Überschreitung dieser Temperatur wieder auf.)

R. Peierls (Zürich).

Born, Max, und Joseph E. Mayer: Zur Gittertheorie der Ionenkristalle. Z. Physik 75, 1—18 (1932).

Das in der älteren Gittertheorie gebräuchliche Abstoßungsglied B/r^n in der potentiellen Energie (r Ionenabstand, B und n Konstanten) wird, um den Ergebnissen

$$r_1 + r_2 - r$$

der Quantenmechanik Rechnung zu tragen, durch ein Glied $b e^{\frac{r_1 + r_2 - r}{\rho}}$ ersetzt, in dem b und ρ universelle, r_1 und r_2 für die beiden betrachteten Ionen charakteristische Konstanten sind. Die anziehenden Kräfte werden ferner durch ein Glied ergänzt, das den van der Waalsschen Kräften Rechnung trägt. Hierdurch wird die numerische Übereinstimmung zwischen Theorie und Meßwerten verbessert, außerdem wird erklärt, warum bei gewissen Kationen das Steinsalzgitter, bei anderen das Wurzitgitter stabiler ist, weil verschiedene Kationen zu verschiedenen van der Waalsschen Kräften Anlaß geben.

R. Peierls (Zürich).

Mayer, Joseph E., und Lindsay Helmholtz: Die Gitterenergie der Alkalihalogenide und die Elektronenaffinität der Halogene. (*Chem. Labor., Johns Hopkins Univ., Baltimore.*) Z. Physik 75, 19—29 (1932).

Die in die vorstehend referierte Methode eingehenden Parameter b und ρ werden für die Alkalihalogenide aus empirischen Daten ermittelt, und hieraus die Gitterenergie berechnet. Diese theoretischen Werte stimmen recht gut mit empirischen Vergleichswerten, die auf verschiedene Weisen gewonnen sind. Wenn diese Gitterenergie bekannt ist, lassen sich aus ihr die Elektronenaffinitäten berechnen; die hierfür gewonnenen Werte dürften bis auf 2% richtig sein.

R. Peierls (Zürich).

Uehling, E. A.: Kinetic interpretation of the Kelvin relations. (*Dep. of Physics, Univ. of Michigan, Ann Arbor.*) Physic. Rev., II. s. 39, 821—830 (1932).

Vermittels einer formalen Lösung der kinetischen Fundamentalgleichung wird nachgewiesen, daß das Blochsche Modell der Metalleitung die allgemeinsten

(Kelvinschen) thermodynamischen Relationen für die thermoelektrischen Erscheinungen liefert, einschließlich des Bridgman-Effektes. Notwendig hierzu ist nur die Annahme der gleichen Wahrscheinlichkeit für restituierende Prozesse. Dagegen braucht weder eine kugelsymmetrische Abhängigkeit der Energie von den Wellenzahlen noch eine Vernachlässigung der Energieübertragung beim Stoß vorausgesetzt zu werden, wie es bei früheren Behandlungen geschah.

Nordheim (Göttingen).

Cabrera, B.: Magnétisme atomique. Ann. Inst. H. Poincaré 2, 93—142 (1932).

Der vorliegende Artikel gibt eine zusammenfassende und vergleichende Übersicht über die theoretisch und experimentell bekannten Tatsachen des Magnetismus von Atomen, Atomionen und Molekülen. — Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit dem Magnetismus freier Moleküle in Gasen und seiner Quantentheorie. Ausgehend von der Schrödingergleichung werden in Anlehnung an die Theorie von van Vleck die Ausdrücke für magnetisches Moment und Suszeptibilität hergeleitet, die verschiedenen Kopplungsverhältnisse besprochen und ihre experimentelle Bestätigung durch den Paramagnetismus von O_2 und NO diskutiert. — Der zweite Teil behandelt vor allem das Verhalten magnetischer Substanzen in Lösungen, insbesondere von Substanzen, die Atome seltener Erden enthalten, wie $Eu_2(SO_4)_3$, Nd_2O_3 , $Yb_2(SO_4)_3$. Es wird gezeigt, wie und inwieweit sich ihr vom Curieschen Verhalten abweichender Temperaturverlauf der Suszeptibilität durch die im Innern der Lösung herrschenden Kräfte verstehen läßt. — Der dritte Abschnitt bespricht den Magnetismus von Atomen und hauptsächlich die Begründung der Annahme eines molekularen Feldes, wie sie durch den Curie-Weisschen Verlauf der Suszeptibilität nahegelegt wird. Während die Theorie von Hund, die nur den Grundzustand betrachtet, den wesentlichen Verlauf des magnetischen Momentes der Ionen der seltenen Erden bereits befriedigend erklärt, haben neuere Arbeiten, insbesondere von van Vleck und A. Frank gezeigt, daß durch Mitberücksichtigung der höheren Terme sich noch eine wesentliche Verfeinerung erreichen läßt, so daß die gegenwärtige Theorie jedenfalls eine geeignete Basis zum theoretischen Verständnis der Erscheinungen liefert.

F. Bloch (Leipzig).

Honda, Kotarô: Über das Weissche molekulare Feld. Z. Physik 75, 352—362 (1932).

Der Verf. glaubt aus der Tatsache, daß das Weissche molekulare Feld die Erscheinung der Backhausen-Sprünge und der Remanenz nicht allein zu erklären vermag, den Schluß ziehen zu können, daß seine Annahme innere Widersprüche enthält und daher auch nicht zur Erklärung der Temperaturabhängigkeit von Sättigungsmagnetisierung und spezifischer Wärme der Ferromagneten gemacht werden darf. Ferner wird darauf hingewiesen, daß, insoweit sich der magnetokalorische Effekt thermodynamisch verstehen läßt, die Hypothese des molekularen Feldes nicht gemacht zu werden braucht.

F. Bloch (Leipzig).

Groot, W. de: Diffusion von Teilchen unter Berücksichtigung der Stoßverluste. (Natuurkundig Labor., N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven.) Physica 11, 337—342 (1931) [Holländisch].

Die physikalischen Annahmen, unter denen der Verf. die Diffusion von Elektronen in einem Gase untersucht, sind die folgenden: Bei jedem Zusammenstoß verliert das Elektron einen Energiebetrag, der im Mittel seiner Energie vor dem Zusammenstoß proportional ist, die Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Zusammenstoß ist unabhängig von seiner Richtung vor dem Stoße. Unter diesen Annahmen wird das Problem auf eine verallgemeinerte Diffusionsgleichung zurückgeführt, die sich integrieren und deren Lösung sich unter verschiedenen Annahmen über die Abhängigkeit der freien Weglänge von der Geschwindigkeit auch numerisch auswerten läßt.

O. Halpern (New York).

Mott, N. F.: The polarisation of electrons by double scattering. *Proc. Roy. Soc. London A* **135**, 429—458 (1932).

Verf. hatte in einer wichtigen Untersuchung [*Proc. Roy. Soc. London A* **124**, 426 (1929)] zuerst eine Anordnung (doppelte Reflexion) angegeben, für welche die Diracsche Theorie des Spinelektrons einen Polarisationsseffekt (Streuungsasymmetrie) erwarten ließ. — In vorliegender Arbeit weist nun Verf. zunächst darauf hin, daß Bohrs These von der Unbeobachtbarkeit des Spins als Partikeleigenschaft nicht besagen will, ein freies Elektron habe überhaupt keinen beobachtbaren Spin, und zeigt die prinzipielle Möglichkeit der Herstellung polarisierter Elektronenstrahlen. — Der Fortschritt der vorliegenden Arbeit gegenüber l. c. liegt erstens in dem Nachweis, daß die als Lösung des Streuproblems angesetzte Kugelfunktionenentwicklung asymptotisch wirklich eine (durchs Coulomb-Feld modifizierte) einfallende + eine Streuwelle repräsentiert. Dies geschieht durch die — mittels des zweiten Eulerschen Integrals erfolgte — Darstellung der Streufunktion durch ein bestimmtes Integral und Auswertung desselben nach der Sattelpunktmethode. Vorher wird gezeigt, daß die Streufunktion für $\lim c \rightarrow \infty$ in den (Gordonschen) nichtrelativistischen Ausdruck übergeht. Zweitens schreitet die nunmehr erhaltene Entwicklung nach Potenzen der Feinstrukturkonstante α fort, gilt somit für beliebiges v und kann in konvergenter Gestalt geschrieben werden. Die Auswertung muß numerisch erfolgen und wurde für Gold ($Z = 79$) und Streuwinkel $= 90^\circ$ (beidemals) durchgeführt bei verschiedenen Elektronengeschwindigkeiten. Die Streuungsasymmetrie wird graphisch und tabellarisch dargestellt und muß diesbezüglich auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Guth (Wien).

Woo, Y. H.: The scattering of X-rays by polyatomic gases. (*Dep. of Physics, Univ., Peiping.*) *Physic. Rev.*, II. s. **39**, 555—560 (1932).

Eine frühere Formel des Verf. wird verbessert durch Einführung eines „mittleren“ Streufaktors F' statt des „wahren“ Streufaktors F in dem Sinne, wie dies von Jauncey in der Comptonschen Formel für die Gesamtstreuung durch ein Atom gemacht wurde. Vergleich mit den Messungen von Wollan an H_2 , N_2 , O_2 gibt bessere Übereinstimmung mit der neuen Formel.

Waller (Upsala).

Jauncey, G. E. M.: Note on Woo's paper on the scattering of X-rays by polyatomic gases. *Physic. Rev.*, II. s. **39**, 561 (1932).

Verbesserung von zwei Formeln in der Arbeit von Y. H. Woo, welche nach dem Verf. nicht ganz korrekt sind. Die Schlußfolgerungen von Woo werden nach dem Verf. dadurch nicht wesentlich betroffen.

Waller (Upsala).

Mrowka, Bernhard: Zur Theorie der Spektrallinienverbreiterung nach der Wellenmechanik. (*II. Phys. Inst., Univ. Königsberg i. Pr.*) *Ann. Physik*, V. F. **12**, 753—786 (1932).

Es werden von denjenigen Effekten, die Verbreitung der Spektrallinien verursachen, diejenigen behandelt, welche auf elektrische Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen eines Gases beruhen. Es wird dafür eine wellenmechanische Theorie gegeben. Insbesondere wird die Abhängigkeit von der Dichte des Gases untersucht. Verf. erhält eine Halbwertsbreite, welche bei kleiner Dichte proportional \sqrt{N} ist (N = Anzahl von Teilchen pro Volumeneinheit). Diese Verbreitung wird nach dem Verf. nur von dem Elektronenaustausch verursacht. Den experimentellen Schwierigkeiten dürfte gemäß dem Verf. zuzuschreiben sein, daß die Experimente teils Proportionalität mit \sqrt{N} , teils mit N ergeben. Neben der Linienverbreitung wird auch die Linienverschiebung genauer untersucht.

Waller (Upsala).

Thomson, John: Arc, spark, and glow: A note on nomenclature. *Philos. Mag.*, VII. s. **13**, 824—834 (1932).